

SUPPLEMENTO
AL VOLUME VII, SERIE IX DEL
NUOVO CIMENTO
A CURA DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

1950

N.º 1

Lo Spettro di inversione di NH_3 .

M. TOMASSINI

Centro di studio per la Fisica delle Microonde del C.N.R.

(ricevuto il 7 Ottobre 1949)

Riassunto. — L'importanza dello spettro di inversione della molecole NH_3 nella spettroscopia con microonde ci ha spinto a raccogliere e ordinare in un breve lavoro monografico i punti più salienti delle teorie, che riguardano la struttura fine e quella iperfine di tale spettro, l'allargamento, l'intensità e la saturazione delle righe e gli effetti STARK e ZEEMAN, nonché i risultati sperimentali più attendibili.

L'esistenza di due configurazioni simmetriche di equilibrio in una molecola, corrispondenti a due minimi della sua energia potenziale, dà luogo ad uno sdoppiamento dei suoi livelli energetici; le molecole a forma di piramide regolare, quali AsH_3 , PH_3 , PCl_3 , NH_3 , ecc., presentano tutte questo fenomeno: l'atomo al vertice della piramide (rispettivamente As, P, P, N) può passare per effetto « tunnel » alla posizione simmetrica rispetto al piano dei tre atomi uguali. Il problema teorico ⁽¹⁾ ⁽²⁾ fu trattato da DENNISON e UHLENBECK ⁽³⁾ nel caso unidimensionale; essi trovarono che la separazione dei sottolivelli di energia vibrazionale è una funzione assai sensibile dell'altezza e della larghezza

⁽¹⁾ P. M. MORSE e N. ROSEN: *Phys. Rev.*, **40**, 1039A (1932).

⁽²⁾ D. M. DENNISON e J. D. HARDY: *Phys. Rev.*, **39**, 938 (1932).

⁽³⁾ D. M. DENNISON e G. E. UHLENBECK: *Phys. Rev.*, **41**, 313 (1932).

della barriera di potenziale che separa i due minimi e, più precisamente, che il rapporto fra la separazione e la frequenza normale varia esponenzialmente al variare dell'area della parte della barriera tagliata dal livello; la forma esatta della barriera, però, non è ancora conosciuta. Le formule teoriche furono applicate nel caso di NH_3 , che, tra i gas con molecole a piramide regolare, era tra i più conosciuti. Sperimentalmente si era osservato nello spettro nell'infrarosso di NH_3 , che le bande di vibrazione sono costituite di due bande quasi sovrapposte e lo spostamento fra di esse risultò essere $1,33 \text{ cm}^{-1}$; dunque si dedusse che la frequenza di inversione per il livello vibrazionale fondamentale doveva essere $0,665 \text{ cm}^{-1}$, come fu poi confermato dall'osservazione di WRIGHT e RANDALL ⁽⁴⁾ dello spettro di rotazione pura nella regione del lontano infrarosso fra 60 e 125μ ⁽⁵⁾; anche qui le righe si presentano sdoppiate con la stessa separazione di $1,33 \text{ cm}^{-1}$.

Era dunque logico pensare che la molecola del gas NH_3 potesse assorbire radiazioni della lunghezza d'onda di $1,5 \text{ cm}$ circa e, in questo senso, il primo esperimento fu compiuto nel 1934 da CLEETON e WILLIAMS ⁽⁶⁾; come sorgenti di radiazioni furono usati oscillatori del tipo « magnetron »; il lavoro fu compiuto alla pressione atmosferica e fu osservata una banda di assorbimento, che presentava un massimo di intensità in corrispondenza alla lunghezza d'onda di $1,25 \text{ cm}$ e che si estendeva per una regione di circa due centimetri di lunghezza d'onda.

Dodici anni dopo fu rifatta la stessa esperienza quasi contemporaneamente da BLEANEY e PENROSE ⁽⁷⁾, da TOWNES ⁽⁸⁾ e da GOOD ⁽⁹⁾ a bassa pressione, per evitare parzialmente l'allargamento delle righe dovuto alle collisioni molecolari; si rivelò allora una struttura fine di una trentina di righe, che sono prodotte dalla distorsione centrifuga, causata dalla rotazione molecolare, sui vari livelli rotazionali; essa infatti influenza la frequenza delle righe, allargando e abbassando la piramide, se la rotazione avviene attorno all'asse di simmetria; allontanando l'atomo N dal piano degli atomi H, se la molecola ruota attorno ad un asse perpendicolare all'asse di simmetria; nel primo caso, l'altezza della barriera diminuisce e quindi aumenta la separazione dei doppietti, nel secondo caso, cresce l'altezza e diminuisce la separazione. Ogni riga di struttura fine è dunque definita da una coppia di particolari valori interi dei numeri quantici J , momento angolare totale della molecola, e K , proiezione di J sull'asse di simmetria.

⁽⁴⁾ N. WRIGHT e H. M. RANDALL: *Phys. Rev.*, **44**, 391 (1933).

⁽⁵⁾ H. M. FOLEY e H. M. RANDALL: *Phys. Rev.*, **59**, 171 (1941).

⁽⁶⁾ C. E. CLEETON e N. H. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **45**, 234 (1934).

⁽⁷⁾ B. BLEANEY e R. P. PENROSE: *Nature*, **157**, 339 (1946).

⁽⁸⁾ C. H. TOWNES: *Phys. Rev.*, **70**, 109 (1946).

⁽⁹⁾ W. E. GOOD: *Phys. Rev.*, **69**, 539 (1946).

La formula, che dà la frequenza delle righe fu calcolata teoricamente da HSI-YIN SHENG, BARKER e DENNISON ⁽¹⁰⁾, ed è del tipo:

$$\nu = \nu_0 + A(J^2 + J - K^2) + BK^2,$$

a cui seguono altri termini più piccoli, che hanno importanza solo per alcune righe; è in evidenza l'effetto dei due tipi di rotazione; i valori numerici delle costanti A , B , sono stati via via adattati alle varie esperienze ed ecco la formula secondo SIMMONS e GORDY ⁽¹¹⁾ per lo stato vibrazionale fondamentale con l'aggiunta di termini di ordine superiore:

$$\begin{aligned} \nu \text{ (mc/sec)} = 23787 - 151,3J(J+1) + 211K^2 + 0,5503 \times \\ J^2(J+1)^2 - 1,531J(J+1)K^2 + 1,0555K^4. \end{aligned}$$

L'elenco delle frequenze caratteristiche di ciascuna riga dello spettro d'inversione di NH_3 , secondo i dati di SIMMONS e GORDY, sarà riportato a pag. 8 insieme con le misure delle rispettive intensità. È da notarsi che non sono mai state osservate righe con numero quantico $K = 0$, corrispondenti ai livelli rotazionali generati dalla rotazione della molecola attorno ad un asse perpendicolare all'asse di simmetria; la teoria prevede, infatti, per le molecole del tipo XY_3 che a causa delle proprietà di simmetria delle autofunzioni, mentre tutti gli altri livelli rotazionali sono sdoppiati, quelli con $K = 0$ sono solo spostati rispetto alla posizione che avrebbero in assenza del fenomeno di inversione e non presentano quindi spettro di assorbimento.

Riguardo alla forma delle righe, VAN VLECK e WEISSKOPF ⁽¹²⁾ rielaborarono le teorie di LORENTZ, sull'assorbimento risonante, e di DEBYE, su quello non risonante, inquadrando in una teoria più generale applicabile alla spettroscopia delle microonde, partendo dal presupposto che le collisioni fossero la causa principale dell'allargamento delle righe spettrali. Essi supposero che gli urti fra le molecole del gas fossero « forti » e « adiabatici », ossia che le collisioni fossero tanto violente che lo stato finale di ogni molecola dopo un urto fosse indipendente dallo stato iniziale e che la durata media di una collisione fosse breve a confronto col periodo di oscillazione del campo applicato; allora le molecole, a collisione avvenuta, si potevano considerare come distribuite in accordo con la legge di BOLTZMANN, secondo il valore istantaneo del campo durante l'urto. Con queste premesse e con alcuni adattamenti al procedimento classico suggeriti dalla meccanica quantistica, VAN VLECK e WEISSKOPF otten-

⁽¹⁰⁾ H. Y. SHENG, E. F. BARKER e D. M. DENNISON: *Phys. Rev.*, **60**, 786 (1941).

⁽¹¹⁾ J. W. SIMMONS e W. GORDY: *Phys. Rev.*, **73**, 713 (1948).

⁽¹²⁾ J. H. VAN VLECK e V. F. WEISSKOPF: *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 227 (1945).

nero per l'assorbimento in una riga nella regione delle microonde, la seguente espressione:

$$\alpha \text{ (cm}^{-1}\text{)} = \frac{8\pi^3\nu^2 N_{JK} |\mu_{JK}|^2 f(\nu_{JK}, \nu)}{3kcT},$$

dove k è la costante di BOLTZMANN, c è la velocità della luce, T è la temperatura assoluta, N_{JK} è il numero delle molecole che si trovano nello stato vibrazionale fondamentale e in quello rotazionale definito dai numeri quantici J e K :

$$|\mu_{JK}|^2 = \frac{\mu^2 K^2}{J(J+1)},$$

il quadrato dell'elemento di matrice del momento elettrico permanente della molecola $^{14}\text{NH}_3$, mediato su tutte le possibili orientazioni di J , essendo $\mu = 1,44 \cdot 10^{-18}$ u.e.s.; $f(\nu_{JK}, \nu)$, detto «fattore di forma» è uguale all'espressione:

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\Delta\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + \Delta\nu^2} + \frac{\Delta\nu}{(\nu + \nu_0)^2 + \Delta\nu^2} \right],$$

essendo $\Delta\nu$ la semilarghezza media della riga; alla risonanza il fattore di forma si può considerare uguale a $1/(\pi\Delta\nu)$ ⁽¹³⁾. Il numero N_{JK} si può esprimere per il calcolo anche nella seguente forma: $Nf_v f_r$; N è il numero di molecole di gas per cm^3 , f_v è la frazione di molecole che si trova nello stato vibrazionale fondamentale: in condizioni normali è trascurabile la quantità di molecole che si trova in stati eccitati e perciò f_v si può considerare spesso uguale a uno; f_r indica la frazione di molecole che si trova nello stato rotazionale considerato ed è uguale all'espressione:

$$g_I g_J \exp[-E_r/kT]/Q_r,$$

i cui simboli hanno questo significato:

$g_I g_J$ = peso statistico dello stato rotazionale,

con

$$g_I = \begin{cases} 1/3 (2I+1)(4I^2+4I+3) & \text{per } K \text{ divisibile per } 3 \\ 1/3 (2I+1)(4I^2+4I) & \text{per } K \text{ non divisibile per } 3 \end{cases}$$

e $g_J = 2(2J+1)$, essendo I lo spin nucleare della terna di atomi uguali:

$$Q_r = [(2I+1)^3/3][(\pi/AB^2)(kT/hc)^3]^{1/2},$$

⁽¹³⁾ W. GORDY: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 668 (1948).

avendo I lo stesso significato di sopra, con $A = h/8\pi^2 c I_A$ e $B = h/8\pi^2 c I_B$, essendo I_A e I_B i momenti di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse di simmetria e ad uno perpendicolare, rispettivamente; infine:

$$E_2 = hc[BJ(J+1) + (A-B)K^2].$$

Integrando l'espressione di VAN VLECK e WEISSKOPF rispetto a ν tra 0 e ∞ , dopo aver diviso per ν^2 , si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha}{\nu^2} d\nu = \frac{8\pi^3 N_{JK} |\mu_{JK}|^2}{3ckT}$$

che è l'area limitata dalla curva di assorbimento, ovvero l'intensità totale dell'assorbimento.

La larghezza naturale delle righe di assorbimento in questa regione spettrale è trascurabilissima a confronto con altri fattori che producono allargamenti delle righe stesse; fra tali fattori è l'«effetto Doppler», che non è però tra i più importanti; l'allargamento che questo effetto produce, supponendolo come unica causa della larghezza delle righe, è espresso dalla formula ⁽¹³⁾:

$$2\Delta\nu = \frac{2\nu}{c} \sqrt{\frac{RT}{M}} \cong 6,07 \cdot 10^{-7} \nu \sqrt{\frac{T}{M}} \quad (\text{c. p. s.}),$$

dove T è la temperatura assoluta ed M il peso molecolare. Quando la pressione non è molto bassa, è preponderante l'effetto prodotto dalle *collisioni molecolari*; l'allargamento dovuto a questa causa si può ricavare dalla formula di VAN VLECK e WEISSKOPF, che ne mostra la dipendenza lineare dalla pressione; l'esperienza conferma questa regola, almeno in buona approssimazione, fino a pressioni dell'ordine di 10 cm Hg, mentre per pressioni maggiori la larghezza delle righe rimane pressochè costante. Quando il *libero cammino medio molecolare* del gas diventa dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni della guida d'onda, l'effetto prodotto dalle collisioni delle molecole contro le pareti è predominante sugli altri effetti; praticamente, quindi, al di sotto di 10^{-3} mm Hg circa di pressione, non è più possibile ridurre sensibilmente la larghezza delle righe; la formula, che esprime l'allargamento dovuto a questa causa, è la seguente:

$$2\Delta\nu = \frac{2}{3\pi} \frac{a+b}{ab} \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (\text{c. p. s.}),$$

dove a e b sono le due dimensioni della guida ed R è la costante dell'equazione caratteristica dei gas.

Se il numero dei quanti incidenti supera nell'unità di tempo quello delle collisioni molecolari, l'equilibrio termico nel gas si rompe e si ha il fenomeno

detto «di saturazione», che si presenta assai facilmente a basse pressioni ⁽¹⁴⁾ ⁽¹⁵⁾; ciò porta, come conseguenza, una diminuzione del coefficiente di assorbimento ed un allargamento delle righe piuttosto pronunciato, dovuti ad un cambiamento delle popolazioni (che tendono ad uguagliarsi) dei livelli fondamentale ed eccitato. La formula di VAN VLECK e di WEISSKOPF, per l'assorbimento di una riga allargata per effetto della pressione, deve essere quindi modificata e questo porta, supponendo che l'allargamento della riga sia dovuto solo alla pressione e alla saturazione e che la potenza incidente su una qualunque sezione normale della guida sia costante in ogni punto della sezione stessa, alle seguenti formule, secondo CARTER e SMITH, per il coefficiente di assorbimento e per la larghezza media della riga:

$$\alpha(\nu) = \alpha_0 \frac{1}{\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_0}\right)^2 + 1 + \frac{AP}{(\Delta\nu_0)^2}} \quad \text{e} \quad 2\Delta\nu = 2\Delta\nu_0 \left(1 + \frac{AP}{(\Delta\nu_0)^2}\right)^{1/2},$$

dove α_0 è il coefficiente di assorbimento alla frequenza di risonanza, se non ci fosse saturazione, $2\Delta\nu_0$ è la larghezza della riga senza saturazione, P è la potenza incidente espressa in erg/cm² sec, A è uguale alla seguente espressione:

$$\frac{8\pi}{3ch^2} |\mu_{JK}|^2 \quad (\text{cm}^2/\text{erg sec})$$

essendo:

$$|\mu_{JK}|^2 = \mu^2 \frac{K^2}{J(J+1)}$$

e $\mu^2 = 1,44 \cdot 10^{-18}$ u.e.s., quadrato del momento dipolare.

Nel 1946 GOOD ⁽¹⁶⁾ per primo osservò una struttura iperfine di molte righe di inversione di ¹⁴NH₃; essa consiste in due coppie di righe di bassa intensità relativa, simmetricamente disposte rispetto alla riga principale e da questa distanziate di qualche megaciclo/sec. Questa struttura fu spiegata teoricamente ⁽¹⁷⁾ da COLES e GOOD ⁽¹⁸⁾ e da DAILEY, KYHL, STRANDBERG, VAN VLECK e WILSON ⁽¹¹⁾, come dovuta ad una interazione ⁽¹⁹⁾ ⁽²⁰⁾ tra il campo elettrico quadrupolare nucleare dell'atomo ¹⁴N e le cariche elettriche della molecola; la teoria su questo tipo di interazioni era già stata sviluppata da

⁽¹⁴⁾ R. L. CARTER e W. V. SMITH: *Phys. Rev.*, **73**, 1053 (1948).

⁽¹⁵⁾ H. S. SNYDER e P. I. RICHARDS: *Phys. Rev.*, **73**, 1178 (1948).

⁽¹⁶⁾ W. E. GOOD: *Phys. Rev.*, **70**, 213 (1946).

⁽¹⁷⁾ J. BARDEEN e C. H. TOWNES: *Phys. Rev.*, **73**, 97 (1948).

⁽¹⁸⁾ D. K. COLES e W. E. GOOD: *Phys. Rev.*, **70**, 979 (1946).

⁽¹⁹⁾ B. P. DAILEY, R. L. KYHL, M. W. P. STRANDBERG, J. H. VAN VLECK e E. B. WILSON: *Phys. Rev.*, **70**, 984 (1946).

⁽²⁰⁾ J. M. JAUCH: *Phys. Rev.*, **72**, 715 (1947).

CASIMIR ⁽²¹⁾ ⁽²²⁾ e, applicata al caso di molecole a piramide regolare, dà la seguente espressione per l'energia di interazione:

$$E = -eqQ \left[1 - \frac{3K^2}{J(J+1)} \right] \frac{\frac{3}{4} C(C+1) - I(I+1)J(J+1)}{2I(2I-1)(2J-1)(2J+3)}$$

dove è e = carica elettronica, $q = \partial^2 V / \partial z^2$ ossia la derivata seconda del potenziale elettrostatico, prodotto dalle cariche della molecola sul nucleo di azoto, rispetto all'asse z di simmetria, Q è il momento quadrupolare nucleare, K e J i soliti numeri quantici rotazionali, I lo spin nucleare di ^{14}N , uguale ad 1,

$$C = F(F+1) - I(I+1) - J(J+1),$$

con

$$F = J + I, \quad J + I - 1, \quad \dots, \quad J - I + 1, \quad J - I,$$

momento angolare totale. I valori assoluti di Q e di $\partial^2 V / \partial z^2$ non sono noti e si ricavano dall'esperienza; in media il valore del prodotto eqQ è 4,08 mc/sec, come è stato calcolato da SIMMONS e GORDY dalla riga $J = K = 1$. Le intensità relative delle righe di struttura iperfine si possono ottenere dalle seguenti formule ⁽²⁰⁾:

per la riga centrale:

$$I_0 = \frac{K^2(2J+1)}{3J^3(J+1)^3} \bar{Q}(J)$$

essendo

$$\bar{Q}(J) = (J+1)^4 + J^4 + [J(J+1) - 1]^2,$$

e per i satelliti:

$$I_1 = \frac{K^2(2J-1)}{3J^3(J+1)^3} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{K^2(2J+3)}{3J^3(J+1)^3};$$

questo per la struttura iperfine di una riga dello spettro di inversione; per ottenere le intensità relative delle varie righe, occorre moltiplicare le formule già scritte per il fattore di peso statistico e per il fattore esponenziale di BOLTZMANN.

L'accordo, però, tra intensità teoriche e sperimentali non è molto soddisfacente; tuttavia giova ricordare che è assai difficile evitare la saturazione alle pressioni alle quali si osserva la struttura iperfine e che la saturazione cambia le intensità relative in modo notevole.

⁽²¹⁾ H. B. G. CASIMIR: *On the interaction between atomic nuclei and electrons* (Teyler Tweed Genootschap Bohn, Haarlem, 1936).

⁽²²⁾ H. B. G. CASIMIR: *Physica*, **2**, 719 (1935).

Ecco una tabella delle frequenze e delle intensità relative delle righe di assorbimento e della separazione delle componenti di struttura iperfine, secondo SIMMONS e GORDY ⁽¹¹⁾:

<i>J</i>	<i>K</i>	ν (MHz/sec)	Intensità relative		Separazione dei satelliti (MHz/sec)	
			calc.	oss.	$\Delta\nu$	$\Delta\nu'$
1	1	23694,49	19,9	30	0,609	1,536
2	2	23722,63	38,5	46	1,286	2,064
3	3	23870,13	100	100	1,683	2,327
4	4	24139,41	53,4	61	1,911	2,488
5	5	24532,98	50,2	48	2,075	2,613
6	6	25056,02	85,5	79	2,202	2,686
7	7	25715,17	33,2	30	2,312	2,758
8	8	26518,91	23,8	22	2,374	2,795
9	9	27478,00	31,9	28	2,443	2,812
10	10	28604,73	9,9	9		
11	11	29914,66	5,8	6		
12	12	31424,97	6,3	7		
13	13	33156,95	1,6	1,8		
14	14	35134,44	0,8	0,8		
15	15	37385,18	0,7	0,6		
16	16	39941,54	0,15	0,13		
13	12	26655,00	1,8	2,8		
14	13	27772,52	0,3	0,6		
15	14	29061,14	0,15	0,2		

Come le intensità, anche le separazioni delle componenti di struttura iperfine misurate sperimentalmente non coincidono con quelle previste teoricamente; l'origine di ciò è da cercarsi probabilmente nel fatto che non è stata considerata un'interazione di ordine superiore al secondo ⁽¹³⁾, la quale interazione d'altra parte non trova sufficiente appoggio nella asimmetria del nucleo dell'atomo di azoto; c'è chi giustifica quel disaccordo con una possibile interazione tra livelli energetici aventi lo stesso numero quantico totale *F* ma con diverso *J*; c'è pure chi ⁽²³⁾ pensa ad una interazione tra il momento magnetico nucleare dell'atomo di ¹⁴N ed il campo magnetico generato dalla rotazione della molecola. Ad ogni modo la questione è ancora allo studio.

Degli isotopi di ¹⁴NH₃ quello che più ci interessa per il fenomeno di inversione è ¹⁵NH₃; per questo, qualitativamente, si può ripetere quanto si è già detto circa la struttura fine dello spettro di assorbimento di ¹⁴NH₃, la cui

⁽²³⁾ J. E. HENDERSON e J. H. VAN VLECK: *Phys. Rev.*, **74**, 106 (1948).

espressione è formalmente del tutto analoga a quella dell'isotopo; ecco infatti ⁽²⁴⁾ l'espressione che dà i numeri di onda delle righe di struttura fine:

$$\nu^* \text{ (cm}^{-1}\text{)} = 0,7575 - 0,0047 \{ J(J+1) - K^2 \} + 0,0019K^2 ;$$

e questa è una tabella delle frequenze di alcune righe, secondo DAILEY, KYHL, STRANDBERG, VAN VLECK e WILSON ⁽¹⁹⁾:

J	K	Frequenze (MHz/sec)
1	1	—
2	2	22640
3	3	22769
4	4	23049
5	5	23406
6	6	23928
7	7	24560
11	10	23686

Nessuna traccia di struttura iperfine, invece, è stata rivelata dalle più accurate esperienze; questo fatto confermerebbe l'ipotesi della interazione basata sul momento elettrico quadrupolare nucleare, giacchè, secondo questa teoria, condizione necessaria per l'esistenza di una struttura iperfine è che lo spin del nucleo sia uguale ad uno oppure maggiore; come è noto, il nucleo di ^{15}N ha spin $1/2$.

COLES e GOOD ⁽¹⁸⁾ furono i primi a sperimentare l'effetto di un campo elettrico nello spettro di assorbimento di NH_3 ; i livelli rotazionali della molecola appaiono scissi in $J+1$ sottolivelli, corrispondenti ai diversi valori del quadrato del numero quantico magnetico, per un effetto STARK del secondo ordine; a causa dell'alta frequenza di inversione di NH_3 , manca l'effetto del primo ordine, perchè l'energia media della molecola nel campo elettrico è nulla in prima approssimazione; è la piccola dissimmetria (che il campo genera) rispetto al piano degli atomi H delle due posizioni di equilibrio dell'atomo N, la causa dell'effetto del secondo ordine. Le separazioni dei sottolivelli possono essere ricavate dalla formula seguente ⁽¹³⁾:

$$\Delta\nu^* \text{ (cm}^{-1}\text{)} = 1,5 \cdot 10^{-4} \left[\frac{MK}{J(J+1)} \right]^2 E^2 ,$$

dove E è il campo elettrico espresso in u.e.s., K e J i soliti numeri quantici rotazionali ed M il numero quantico magnetico, che nella nostra formula è

⁽²⁴⁾ R. FREYMAN, R. FREYMAN e J. LE BOT: *Journ. de Phys. et Rad.*, serie VIII, 9, (1948).

soggetto alla relazione $0 \leq M^2 \leq J^2$. Gli isotopi $^{14}\text{NH}_3$ e $^{15}\text{NH}_3$ hanno, a questo riguardo, lo stesso comportamento.

Anche l'effetto ZEEMAN sullo spettro di inversione di NH_3 fu osservato per la prima volta da COLES e GOOD ⁽¹⁸⁾ nel 1946: un campo magnetico di 6600 oersted, perpendicolare alla direzione del campo elettrico, scindeva ogni riga dello spettro in doppietti, la cui separazione appariva pressochè indipendente dai numeri quantici J e K . In seguito JEN ⁽²⁵⁾ sviluppava la teoria dell'effetto ZEEMAN sugli spettri d'inversione ed interpretava correttamente i risultati sperimentali. Per l'effetto ZEEMAN del primo ordine, come è nel caso di NH_3 data la dipendenza lineare (trovata sperimentalmente) della separazione dei doppietti dal campo applicato, la separazione stessa è proporzionale anche ad un fattore in stretta relazione con un momento magnetico permanente:

$$\Delta\nu = \pm g \frac{\mu_0}{h} H,$$

dove $\Delta\nu$ è la separazione in frequenza tra una componente del doppietto e la frequenza della riga in assenza del campo, h è la costante di PLANCK, H il campo magnetico, μ_0 il magnetone nucleare e g il cosiddetto « fattore $-g$ » o rapporto fra momento meccanico e momento magnetico; il fattore $-g$ per $^{14}\text{NH}_3$, come è stato dedotto dall'esperienza, è circa 0,47.

Secondo JEN, tre sono le possibili origini del momento magnetico permanente: a) il momento magnetico nucleare dell'atomo ^{14}N , b) il momento magnetico generato dai moti orbitali dei nuclei e degli elettroni nella molecola, e c) il momento magnetico degli atomi H ; quest'ultima possibilità è però da scartarsi, per l'ordine di grandezza del fattore $-g$; sono quindi da prendere in considerazione le interazioni che derivano dalle prime due origini. Chiamando $g_{\text{mol.}}$ e $g_{\text{N.}}$ i fattori $-g$ rispettivamente della molecola rispetto all'asse di rotazione e del nucleo di ^{14}N , le formule per la scissione delle righe di struttura iperfine per l'effetto ZEEMAN sono le seguenti:

per le componenti ZEEMAN della riga centrale:

$$\Delta\nu_0 = \pm \frac{H\mu_0}{h} \left[\frac{g_{\text{mol.}} + g_{\text{N.}}}{2} + \frac{J(J+1) - I(I+1)}{F(F+1)} \frac{(g_{\text{mol.}} - g_{\text{N.}})}{2} \right];$$

per le componenti ZEEMAN delle coppie di righe satelliti più vicine alla riga centrale:

$$\Delta\nu_s = \Delta\nu_0 + \frac{M\mu_0 H}{h} \left(\frac{1}{J+2} - \frac{1}{J} \right) \left[\frac{J(J+1) - I(I+1)}{J} \frac{(g_{\text{mol.}} - g_{\text{N.}})}{2} \right];$$

⁽²⁵⁾ C. K. JEN: *Phys. Rev.*, **74**, 1396 (1948).

per le componenti ZEEMAN delle coppie di satelliti più lontani:

$$\Delta\nu_s = \Delta\nu_0 + \frac{M\mu_0 H}{h} \left(\frac{1}{J+1} - \frac{1}{J-1} \right) \left[\frac{J(J+1) - I(I+1)}{J} \frac{(g_{\text{mol.}} - g_{\text{N.}})}{2} \right]$$

essendo $-(J-1) \leq M \leq +(J-1)$.

Il valore numerico di $g_{\text{N.}}$ per ^{14}N , trovato per altra via, è 0,403 e quello di $g_{\text{mol.}}$ per $^{14}\text{NH}_3$, ricavato da esperienze con microonde, è $0,48 \pm 0,03$; tenendo conto degli errori sperimentali, $g_{\text{mol.}}$ non dipende fortemente da J e da K .

L'effetto ZEEMAN per l'isotopo $^{15}\text{NH}_3$, è assai più semplice, perchè, essendo del tutto trascurabile il momento magnetico nucleare di ^{15}N la scissione delle righe dipende soltanto dal fattore $-g$ molecolare, praticamente uguale in valore numerico a quello di $^{14}\text{NH}_3$; ecco dunque la formula delle separazioni in frequenza:

$$\Delta\nu = \pm g_{\text{mol.}} \frac{\mu_0}{h} H.$$

SUMMARY

The importance of the inversion spectrum of the molecule NH_3 in microwave spectroscopy induced me to collect and arrange, in a short monographic work, the most salient points of the theories concerning fine and hyperfine structures, broadening, intensity, saturation, STARK und ZEEMAN effects of the NH_3 inversion spectrum lines, as also the most remarkable experimental results.

I momenti di quadrupolo elettrico dei nuclei atomici.

F. FILIPPAZZI

Istituto di Fisica dell'Università di Pavia

(ricevuto il 3 Gennaio 1950)

Riassunto. — Si fa un quadro delle attuali conoscenze teoriche e sperimentali sui momenti di quadrupolo dei nuclei atomici. Il momento di quadrupolo nucleare è una grandezza atta a determinare e descrivere la « forma » di ogni singolo nucleo; esso pertanto rispecchia, del nucleo stesso, l'interna costituzione. Da ciò è chiaro come i momenti di quadrupolo abbiano già rivelato fatti di portata generale e suggerito idee, ancora in fase di discussione e sviluppo, riguardanti le forze nucleari e la struttura del nucleo (natura non centrale delle forze nucleari; modello nucleare a « shell » di protoni e neutroni; ecc.). Il momento q costituisce pertanto di tutta la poliedrica fenomenologia dei nuclei uno degli aspetti interessanti e ricchi di possibilità chiarificatrici.

IL MOMENTO DI QUADRUPOLO DI UNA DISTRIBUZIONE QUALSIASI DI ELETTRICITÀ

1. — I momenti elettrici di una distribuzione qualsiasi di elettricità.

Prima di passare allo studio dei momenti elettrici dei nuclei — ed in particolare del momento di quadrupolo — è opportuno dare la definizione di momento elettrico in modo del tutto generale, riferendoci cioè ad una distribuzione *qualsiasi* di carica elettrica.

Si abbia una distribuzione qualsiasi di elettricità contenuta in un volume finito v ; sia poi questa distribuzione immobile, *statica*. Il potenziale scalare V (e quindi il campo elettrico che ne è il gradiente) creato dalla suddetta distri-

buzione di elettricità in un punto P fuori di essa, è fornito notoriamente dall'integrale:

$$(1) \quad V = \int_v \frac{\rho}{r} dv,$$

dove ρ è la densità di carica elettrica nel generico elemento di volume dv , ed r è la distanza di P da dv .

Orbene noi mostreremo ora come l'integrale scritto possa scindersi in una successione di integrali, ossia come il potenziale V possa considerarsi la somma di una successione di termini:

$$(2) \quad V = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \dots$$

L'utilità di una tale scomposizione consiste nel fatto che, come vedremo, ogni termine della (2) è in relazione con la particolare forma della distribuzione di elettricità data.

Considerando la fig. 1 (in cui O è un punto qualsiasi interno a v) si ha subito:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rs \cos \theta + s^2}} = \frac{1}{R \sqrt{1 - 2 \frac{s}{R} \cos \theta + \left(\frac{s}{R}\right)^2}},$$

da cui sviluppando secondo *funzioni sferiche*:

$$(3) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{s}{R} \cos \theta + \frac{s^2}{2R^2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right\},$$

tralasciando i termini successivi in s^3/R^3 , s^4/R^4 ,... il cui valore è via via più piccolo.

Possiamo anche mettere $1/r$ sotto un'altra forma; riferendoci infatti a coordinate cartesiane con origine in O , se diciamo x, y, z le coordinate del generico punto M del volume v , ed α, β, γ i coseni direttori della direzione OP , si ha (vedi fig. 1):

$$\mathbf{s} = (M - O) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} \quad (\mathbf{n} = \text{versore} = (P - O)/|P - O|).$$

E quindi:

$$(\bullet) \quad \begin{cases} s^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ s \cos \theta = x\alpha + y\beta + z\gamma, \\ s^2 \cos^2 \theta = x^2\alpha^2 + y^2\beta^2 + z^2\gamma^2 + 2x\alpha y\beta + 2y\beta z\gamma + 2z\gamma x\alpha. \end{cases}$$

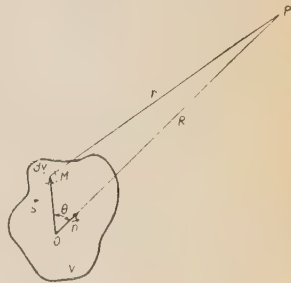


Fig. 1.

Con le (●) la (3) si scrive:

$$(3') \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} \{ \alpha x + \beta y + \gamma z \} + \frac{1}{2R^3} \{ x^2(3\alpha^2 - 1) + y^2(3\beta^2 - 1) + z^2(3\gamma^2 - 1) + 6\alpha\beta xy + 6\beta\gamma yz + 6\gamma\alpha zx \} + \dots$$

Sostituendo allora nella (1) le espressioni di $1/r$ sopra trovate, si ottiene:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \int_v \frac{\rho}{R} dv + \int_v \frac{\rho s \cos \theta}{R^2} dv + \int_v \frac{\rho s^3 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2R^3} dv + \dots \\ V &= \frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{R^2} \{ \alpha \mathcal{P}_x + \beta \mathcal{P}_y + \gamma \mathcal{P}_z \} + \frac{1}{2R^3} \{ (3\alpha^2 - 1) \mathcal{P}_{xx} + (3\beta^2 - 1) \mathcal{P}_{yy} + (3\gamma^2 - 1) \mathcal{P}_{zz} + 6\alpha\beta \mathcal{P}_{xy} + 6\beta\gamma \mathcal{P}_{yz} + 6\gamma\alpha \mathcal{P}_{zx} \} + \dots \end{aligned} \right.$$

avendo posto in quest'ultima:

$$(+) \quad \varepsilon = \int_v \rho dv ;$$

$$(+)'' \quad \mathcal{P}_x = \int_v \rho x dv ; \quad \mathcal{P}_y = \int_v \rho y dv ; \quad \mathcal{P}_z = \int_v \rho z dv ;$$

$$(+)''' \quad \mathcal{P}_{xx} = \int_v \rho x^2 dv ; \quad \mathcal{P}_{xy} = \int_v \rho xy dv ; \quad \text{ecc.}$$

La (4) o la (4') ci dice che, come si era affermato, il potenziale scalare V di una distribuzione qualsiasi di carica elettrostatica può considerarsi la somma di una successione di termini.

Di questi:

— il 1°, cioè $V^{(1)} = \varepsilon/R = (1/R) \int_v \rho dv$, ci dà il potenziale V in prima approssimazione, quando cioè si possa ritenere senza sensibile errore (cioè per P molto lontano da v) la carica totale $\int_v \rho dv$ concentrata in un punto O del volume da essa effettivamente occupato;

— il 2°, cioè $V^{(2)} =$ termine in $1/R^2$, è il contributo al valore complessivo di V dovuto, per definizione, al *momento di dipolo elettrico* della distribuzione d'elettricità, momento rappresentato dal vettore:

$$(5) \quad \mathfrak{P} = \int_v \rho \mathbf{s} dv ,$$

di componenti $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z$. Il valore di $V^{(2)}$ infatti, come appare dalla (4'), dipende essenzialmente dai valori delle componenti del vettore \mathfrak{P} : queste componenti a loro volta, come risulta dalle (+'''), dipendono solamente dalle

caratteristiche spaziali della distribuzione di elettricità data. (I restanti termini della $V^{(2)}$ dipendono invece solo dalla posizione del punto P in cui si calcola il potenziale). Pertanto il momento elettrico di dipolo risulta una caratteristica per ogni distribuzione di elettricità.

In particolare il *momento di dipolo elettrico* di una distribuzione di carica risulta *nullo* quando la distribuzione suddetta possiede un *centro di simmetria*; si constata infatti facilmente — mediante le (1'') — che in questo caso le componenti $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z$, di \mathfrak{P} sono tutte nulle;

— il 3°, cioè $V^{(2)}$ = termine in $1/R^3$ è il contributo al valore complessivo di V dovuto, per definizione, al *momento di quadrupolo elettrico* della distribuzione di elettricità, momento rappresentato dal tensore simmetrico di rango 2 (tensore doppio) \mathfrak{P} di componenti:

$$(6) \quad \mathcal{P}_{ik} = \mathcal{P}_{ki} = \int_v \rho x_i x_k dv \quad \left\{ \begin{array}{l} i, \quad = 1, 2, 3, \\ x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z. \end{array} \right.$$

Il valore di $V^{(3)}$ infatti, come appare dalla (4'), dipende essenzialmente dai valori delle componenti del tensore \mathfrak{P} ; componenti che a loro volta, come risulta dalla loro espressione, dipendono solamente dalle caratteristiche spaziali della distribuzione di elettricità data. Pertanto il momento di quadrupolo elettrico risulta una caratteristica per ogni distribuzione di elettricità;

— $L'(n+1)$ -esimo termine è il contributo al valore complessivo V dovuto, per definizione, al *momento elettrico $2n$ -polare* della distribuzione di carica, momento rappresentato da un tensore simmetrico di rango n .

Questo il significato dei vari termini la cui somma dà il potenziale V ; occorre però tenere presente che il contributo dato dai termini successivi al terzo (termini in $(1/R^4, 1/R^5, \dots)$ è, almeno per quel che riguarda la distribuzione delle cariche nei nuclei atomici, trascurabile e quindi lo studio dei momenti elettrici successivi a quello di quadrupolo non ha per noi praticamente interesse.

Si potrà quindi, nella generalità dei casi scrivere:

$$(7) \quad V = V_m + V_d + V_q,$$

essendo V_m, V_d, V_q , rispettivamente il termine di monopolio, di dipolo e di quadrupolo delle (4).

Il termine di monopolio è evidentemente nullo solo nel caso che la carica totale in v sia nulla.

Il termine di dipolo è *nullo*, in particolare, ove siano nulle le tre componenti del momento di dipolo elettrico \mathfrak{P} , il che avviene — come s'è già visto — nel caso che la carica possieda un *centro di simmetria*; in tal caso dunque il

potenziale V dipende — a parte il termine V_m — essenzialmente dal termine di quadrupolo.

Del termine V_q di quadrupolo, data la sua importanza, tratteremo a parte nel prossimo paragrafo.

2. — Il momento di quadrupolo elettrico “effettivo”.

Consideriamo dunque la porzione V_q del potenziale complessivo V , dovuta al momento di quadrupolo elettrico:

$$V_q = \frac{1}{2R^3} \{ (3\alpha^2 - 1)\mathcal{P}_{xx} + (3\beta^2 - 1)\mathcal{P}_{yy} + \\ + (3\gamma^2 - 1)\mathcal{P}_{zz} + 6\alpha\beta\mathcal{P}_{xy} + 6\beta\gamma\mathcal{P}_{yz} + 6\gamma\alpha\mathcal{P}_{zx} \}.$$

Tenendo conto delle espressioni dei \mathcal{P}_{ik} e supponendo per semplicità $\rho = \text{cost}$, la precedente si può scrivere:

$$(8) \quad V_q = \frac{\varepsilon}{2R^3} \{ (3\alpha^2 - 1)\overline{x^2} + (3\beta^2 - 1)\overline{y^2} + \\ + (3\gamma^2 - 1)\overline{z^2} + 6\alpha\beta\overline{xy} + 6\beta\gamma\overline{yz} + 6\gamma\alpha\overline{zx} \}$$

($\varepsilon = \rho v =$ carica totale in v). Questa forma della V_q è particolarmente adatta per la discussione — che ora faremo — dei vari casi che si presentano in relazione alla *forma* della particolare distribuzione di elettricità data.

1° CASO. — La distribuzione di elettricità ammetta *tre piani ortogonali di simmetria*; assumendo (come è sempre lecito fare) questi come *piani coordinati cartesiani*, con origine nel punto comune di intersezione, si ha evidentemente $\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0$ (ossia delle componenti di \mathfrak{P} solo tre — \mathcal{P}_{xx} , \mathcal{P}_{yy} , \mathcal{P}_{zz} — non non sono nulle); in questo caso il potenziale V_q è dunque:

$$V_q = \frac{\varepsilon}{2R^3} \{ (3\alpha^2 - 1)\overline{x^2} + (3\beta^2 - 1)\overline{y^2} + (3\gamma^2 - 1)\overline{z^2} \}.$$

2° CASO. — La distribuzione ammetta ∞ *piani di simmetria*, cioè possieda *simmetria sferica*; si ha allora $\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0$ e inoltre $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = 0$, e quindi:

$$V_q = \frac{\varepsilon}{2R^3} \{ 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3 \} \overline{x^2} = 0,$$

cioè il potenziale V_q — e quindi il campo elettrico E_q che ne è il gradiente — è in questo caso nullo; ricordando poi che nel caso in questione è pure $V_a = 0$, per la (7) risulta $V = V_m$; si è cioè ritrovato, per via analitica, un ben noto

Produzione

ALLOCCHIO, BACCHINI & C.

Strumenti Elettrici di Misura
per Laboratorio e Industriali

Per misure di:

resistenza - f. e. m. - capacità
induttanza

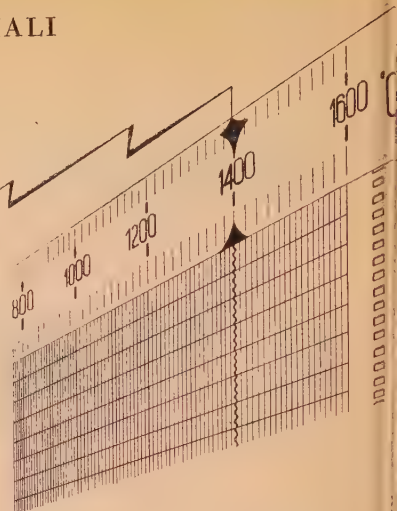
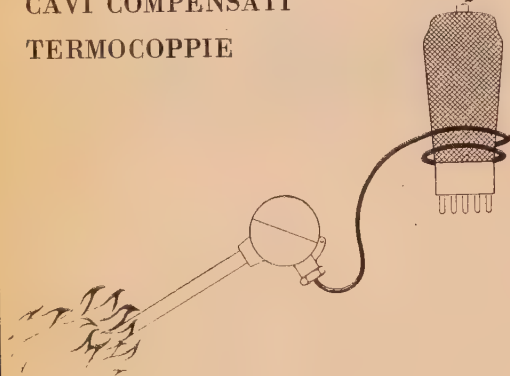
Campioni di:

resistenza - capacità - induttanza

Strumenti Elettronici di Misura

CONTROLLO TEMPERATURE

PIROMETRI E TERMOMETRI INDUSTRIALI
INDICATORI - AUTOREGOLATORI - REGI-
STRATORI GALVANOMETRICI
POTENZIOMETRICI A SISTEMA
ELETTRONICO - TERMOME-
TRI A RESISTENZA
CAVI COMPENSATI
TERMOCOPPIE



FAS FABBRICA APPARECCHI SCIENTIFICI
DOTT. TIEGHI - MILANO
VIA PICCOLLETTA 20 - T. 5-27



FANTINI COSMI S. A.

MILANO

VIA GIOVANNI DA MILANO, 15

TELEFONI: 293252 - 296098

TELERUTTORI, teleavviatori automatici
a rottura in aria ed in olio.

BATTERIE blindate stagne.

QUADRI di manovra.

REGOLATORI di livello, temperatura,
pressione, umidità e tempo.

VALVOLE a comando elettrico a sole-
noide e motorizzate.

SERVOMOTORI elettrici.

APPARECCHIATURE automatiche com-
plete per tutte le applicazioni.

LESA

**COSTRUZIONI
ELETTO-
MECCANICHE**

MILANO - Via Bergamo, 21

Tel. 54.942 - 54.943 - 573.208 - 578.020

- ★ Motori elettrici giradischi per radio-
fonografi.
- ★ Riproduttori fonografici.
- ★ Complessi fonografici (motori e ripro-
duttori uniti).
- ★ Resistenze variabili (potenziometri e
reostati).
- ★ Amplificatori fissi e portatili.
- ★ Apparecchiature telefoniche e frequenz
vettrici
- ★ Microfoni, laringofoni e cuffie per radio
e telefonia.
- ★ Interruttori, commutatori ed accessori
vari.
- ★ Macchine elettriche di piccola potenza
(motori, generatori, convertitori, al-
mentatori, ecc.).
- ★ Ventilatori ed aspiratori.
- ★ Apparecchi giracampioni per vetrini
e mostre.
- ★ Equipaggiamenti per la motorizzazione
delle macchine da cucire.
- ★ Microtelefoni.
- ★ Indicatori di sintonia.



Un sessantennio di vita,
centinaia di cicli produttivi,
migliaia di prodotti, questa in
sintesi la storia del Gruppo
Montecatini che produce mate-
rie prime per tutte le industrie

*Leggete ed
abbonatevi
al*

NUOVO CIMENTO

Direzione in MILANO presso
l'Istituto di Fisica dell'Università
VIA SÁLDINI N. 50

teorema dell'elettrostatica: «il potenziale generato da una distribuzione di elettricità avente simmetria sferica è uguale al potenziale generato dalla carica totale della distribuzione supposta concentrata nel centro di simmetria».

È da notare poi che, pur essendo $V_q = 0$, il momento \mathfrak{P} di quadrupolo non è nullo, essendo le componenti $\mathcal{P}_{xx} = \mathcal{P}_{yy} = \mathcal{P}_{zz} \neq 0$.

3° CASO. — La distribuzione di carica abbia la *simmetria di un ellissoide di rotazione*.

Fissata al solito la terna cartesiana con origine nel centro di simmetria, prendiamo l'asse z coincidente con la direzione dell'asse di simmetria di rotazione.

Saranno ancora nulli, *a fortiori*, i valori medi \overline{xy} , \overline{yz} , \overline{zx} , e sarà inoltre, evidentemente $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$ (cioè tutte le componenti di \mathfrak{P} sono nulle eccetto tre: $\mathcal{P}_{xx} = \mathcal{P}_{yy} = \mathcal{P}_{zz}$); avremo dunque in questo caso:

$$\begin{aligned} V_q &= \frac{\varepsilon}{2R^3} \{ 3(\alpha^2 + \beta^2)\overline{x^2} + 3\gamma^2\overline{z^2} - \overline{r^2} \} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2R^3} \left\{ 3(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\overline{r^2} - \overline{z^2}}{2} + 3\gamma^2\overline{z^2} - \overline{r^2} \right\}. \end{aligned}$$

che si può scrivere ($\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$):

$$(9) \quad V_q = \frac{1}{4R^3} (3\gamma^2 - 1) \cdot \varepsilon(\overline{3z^2} - \overline{r^2}).$$

Da questa appare come il valore di V_q sia determinato, in un punto generico $P (\equiv R, \gamma)$, solo dalla quantità: $Q = \varepsilon(\overline{3z^2} - \overline{r^2})$; appare anzi come il potenziale V_q dipenda, nel caso in questione, essenzialmente, dalla quantità:

$$(10) \quad q = \overline{3z^2} - \overline{r^2} = \overline{r^2(3 \cos^2 \theta - 1)},$$

(dove $\theta = \widehat{zr}$), quantità che a sua volta dipende solamente dalle caratteristiche spaziali della distribuzione di elettricità (il restante termine $(1/4R^3)(3\gamma^2 - 1)$ dipende solo dalla posizione del punto generico P in cui si calcola il potenziale).

Dunque la grandezza q costituisce, all'incirca, pel caso particolare in questione (simmetria di rotazione), quello che, nel caso generale, era il momento di quadrupolo elettrico \mathfrak{P} ; e quindi q viene detto il « momento di quadrupolo elettrico « effettivo » della distribuzione di carica ».

Il momento q , ripetiamolo, dipende solo dalla forma della distribuzione di elettricità data, e precisamente si ha, come è chiaro dalla (10):

simmetria sferica se $q = 0$ ⁽¹⁾;

(¹) Questa proposizione non è invertibile, cioè un momento di quadrupolo $q = 0$ non comporta necessariamente una simmetria sferica della distribuzione di carica. Noi però, per semplicità, riterremo nel seguito — per quel che riguarda la carica

simmetria di rotazione allungata in direzione di un asse ($\equiv z$) se $q > 0$;

simmetria di rotazione appiattita in direzione di un asse ($\equiv z$) se $q < 0$.

Il segno di q stabilisce cioè il tipo di simmetria (sfera; ellissoide allungate; ecc.) mentre il suo valore assoluto fornisce il grado di simmetria (grado di deviazione dalla simmetria sferica).

NOTA. — Nel seguito noi denomineremo — secondo l'uso — la grandezza q (« momento di quadrupolo elettrico *effettivo* ») semplicemente con « momento di quadrupolo elettrico », benchè, per quel che si è visto, impropriamente.

3. — Interazione elettrostatica tra due distribuzioni qualsiasi di elettricità.

Estendiamo le considerazioni fatte precedentemente pel potenziale coulombiano di *una* distribuzione di carica elettrica, al calcolo dell'energia coulombiana di interazione tra *due* distribuzioni di carica.

Si abbiano due distribuzioni qualsiasi di elettricità, entrambe immobili, occupanti rispettivamente i volumi v_1 e v_2 .

L'energia coulombiana di interazione tra le due distribuzioni è notoriamente fornita dall'integrale:

$$(11) \quad W_{1,2} = \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r} dv_1 dv_2,$$

essendo:

ρ_1 e ρ_2 = densità di carica rispettivamente nel volume v_1 e v_2 ;

dv_1 e dv_2 = elementi di volume rispettivamente in v_1 e v_2 ;

r = distanza tra dv_1 e dv_2 .

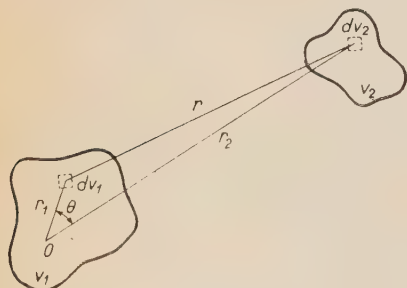


Fig. 2.

Vogliamo ora mostrare come l'integrale scritto possa scindersi in una successione di integrali, ossia come l'energia coulombiana $W_{1,2}$, possa considerarsi la somma di una successione di termini:

$$(12) \quad W_{1,2} = W_{1,2}^{(1)} + W_{1,2}^{(2)} + W_{1,2}^{(3)} + \dots$$

L'utilità di tale scomposizione consiste, al solito, nel fatto che ogni termine della (12) è in relazione con la forma delle distribuzioni di elettricità.

nucleare — che ad un momento $q = 0$ corrisponda una distribuzione a simmetria sferica

Fissato un punto di riferimento O , per esempio nel volume v_1 , si ha subito dalla fig. 2:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta + r_1^2}} = \frac{1}{r_2 \sqrt{1 - 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \theta + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}},$$

da cui, sviluppando al solito secondo funzioni sferiche:

$$(13) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_2} \left\{ 1 + \frac{r_1}{r_2} \cos \theta + \frac{r_1^2}{2r_2^2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right\}.$$

Sostituendo questa espressione di $1/r$ nella (11) si ottiene:

$$(14) \quad W_{1,2} = \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_2} dv_1 dv_2 + \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_2^2} r_1 \cos \theta dv_1 dv_2 + \\ + \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{2r_2^3} r_1^2 (3 \cos^2 \theta - 1) dv_1 dv_2 + \dots$$

La (14) ci dice che — come si era affermato — l'energia coulombiana di interazione tra due distribuzioni qualsiasi di carica elettrica può considerarsi la somma di una successione di termini. Di questi:

— Il primo:

$$W_{1,2}^{(1)} = \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_2} dv_1 dv_2 = \int_{v_2} \rho_2 dv_2 \int_{v_1} \frac{\rho_1}{r_2} dv_1,$$

rappresenta evidentemente l'energia di interazione coulombiana tra la distribuzione ρ_2 e la distribuzione ρ_1 , supposta quest'ultima concentrata in un punto O del volume v_1 da essa effettivamente occupato (ossia supponendo che la carica in v_1 abbia simmetria sferica) (notare che $\int_{v_1} (\rho_1/r_2) dv_1$ non è altro che il primo termine della (4)).

L'energia $W_{1,2}^{(1)}$ rappresenta dunque l'energia complessiva $W_{1,2}$ in prima approssimazione, quando cioè la distribuzione ρ_1 possa ritenersi, senza sensibile errore, sferica ($W_{1,2}^{(1)} \gg$ di tutti i termini successivi).

— Il secondo

$$W_{1,2}^{(2)} = \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_2^2} r_1 \cos \theta dv_1 dv_2 = \int_{v_2} \rho_2 dv_2 \int_{v_1} \frac{\rho_1 r_1 \cos \theta}{r_2^2} dv_1,$$

rappresenta evidentemente l'energia di interazione tra la distribuzione ρ_2 e la distribuzione ρ_1 , dovuta al momento di dipolo elettrico di quest'ultima (infatti $\int_v \frac{\rho_1 r_1 \cos \theta}{r_2^2} dv_1$ non è altro che il secondo termine della (4)).

Notiamo esplicitamente che — in base a quanto già detto — l' $\int_{v_1} \frac{\rho_1 r_1 \cos \theta}{r_2^2} dv_1$ e quindi l'energia $W_{1,2}^{(2)}$ risulta *nulla* quando la distribuzione di elettricità in v_1 possiede un *centro di simmetria*.

In questo caso l'energia complessiva $W_{1,2}$ dipende — a parte il termine $W_{1,2}^{(1)}$ — essenzialmente dal termine di quadrupolo $W_{1,2}^{(3)}$.

— Il terzo

$$W_{1,2}^{(3)} = \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{2r_2^3} r_1^2 (3 \cos^2 \theta - 1) dv_1 dv_2 = \int_{v_2} \rho_2 dv_2 \int_{v_1} \frac{\rho_1 r_1^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r_2^3} dv_1,$$

rappresenta evidentemente l'energia di interazione tra la distribuzione ρ_2 e la distribuzione ρ_1 , dovuta al momento di quadrupolo elettrico di quest'ultima (infatti l' $\int_{v_1} \frac{\rho_1 r_1^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r_2^3} dv_1$ non è altro che il terzo termine della (4)).

Pertanto, nel caso particolare di una distribuzione di elettricità ρ_1 avente simmetria di rotazione attorno ad un asse, l' $\int_{v_1} \frac{\rho_1 r_1^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r_2^3} dv_1$ e quindi l'energia $W_{1,2}^{(3)}$ di quadrupolo risulta *nulla* quando la distribuzione di elettricità in v_1 abbia un momento di quadrupolo $q = 0$.

STRUTTURA DEGLI SPETTRI ED ESISTENZA DI MOMENTI DI QUADRUPOLO ELETTRICO NEI NUCLEI ATOMICI

4. — Struttura fina degli spettri ed esistenza di momenti intrinseci nell'elettrone.

L'interpretazione teorica dei dati spettroscopici relativi agli atomi idrogenoidi portò, come noto, al modello atomico di BOHR-SOMMERFELD, in cui si attribuiva all'elettrone un *momento meccanico orbitale* rappresentabile, con un vettore \mathbf{l} il cui modulo dà il valore, unità in $h/2\pi$, del momento della quantità di moto dell'elettrone rispetto al nucleo.

Uno stato dell'elettrone nell'atomo era caratterizzato dai due numeri quantici n ed l che definivano rispettivamente l'energia dell'elettrone e l'eccentricità della sua orbita.

Quindi l'emissione delle righe spettrali (corrispondenti, secondo la formula di BOHR $\nu = (E_{n_2} - E_{n_1})/h$, a salti quantici tra due livelli energetici dell'elettrone ottico) veniva a dipendere dal solo numero quantico totale n .

Questo modello apparve insufficiente quando l'ulteriore sviluppo della

tecnica spettroscopica mostrò la molteplicità delle righe spettrali già credute semplici (*struttura fina* degli spettri), e quindi la molteplicità di un livello energetico definito da un numero quantico n . La difficoltà fu superata da UHLENBECK e GOUDSMIT attribuendo, nel modello planetario dell'atomo, un moto di rotazione dell'elettrone su sè stesso (ipotesi dell'elettrone rotante). Con ciò l'elettrone veniva a possedere, oltre al momento orbitale, un *momento meccanico intrinseco* (*spin*) rappresentabile con un vettore \mathbf{s} il cui modulo, per spiegare i dati sperimentali, era posto uguale a $1/2$ in unità $\hbar/2\pi$; conseguentemente l'elettrone, essendo una carica elettrica rotante su sè stessa, era assimilabile ad un dipolo magnetico, cioè veniva a possedere un *momento magnetico intrinseco* μ_s parallelo a \mathbf{s} , il cui modulo risultò essere (sperimentalmente, ad esempio, con l'esperienza diretta di STERN e GERLACH; teoricamente con la teoria di DIRAC) uguale ad un magnetone di BOHR (magnetone di $\text{BOHR} = eh/4\pi mc$).

Con questa ipotesi l'energia totale dell'elettrone nell'atomo non dipendeva più da un solo numero quantico (n); infatti l'energia totale E_{tot} di un livello risultava la somma dell'energia cinetica e potenziale E_n (definita col numero quantico n) e dell'*energia magnetica addittiva* ΔE_s posseduta dall'elettrone (= dipolo) di momento magnetico μ_s immerso nel campo magnetico dell'atomo (creato dalle cariche elettroniche rotanti attorno al nucleo e dal nucleo stesso).

Il valore di ΔE_s è funzione, come noto, dell'angolo tra il momento magnetico dell'elettrone e la direzione del campo magnetico; cioè ΔE_s dipende dall'angolo tra i vettori \mathbf{s} (parallelo a μ_s) ed \mathbf{l} (parallelo al campo magnetico).

Per spiegare i dati sperimentali occorre poi ammettere che lo spin \mathbf{s} possa orientarsi rispetto ad \mathbf{l} solo secondo determinate direzioni, e precisamente o parallelamente od antiparallelamente.

Con ciò un livello energetico definito dal numero quantico n si scinde in più altri, tanti quanti sono i valori di ΔE_s relativi al detto livello n (infatti $E_{tot} = E_n + \Delta E_s$), cioè resta spiegata la molteplicità dei livelli energetici e quindi la struttura fine degli spettri di atomi idrogenoidi.

Le considerazioni precedenti si estendono al caso generale di atomi con più elettroni. Usando la rappresentazione vettoriale precedente, si avranno in un atomo:

un *momento meccanico orbitale* \mathbf{L} somma vettoriale dei momenti meccanici \mathbf{l} dei suoi elettroni;

un *momento meccanico intrinseco* \mathbf{S} somma vettoriale dei momenti meccanici \mathbf{s} dei suoi elettroni;

ed analogamente si avrà un momento magnetico orbitale μ_L ed uno intrinseco μ_s .

Per interpretare i dati sperimentali occorre poi ammettere (come nel caso di atomi con un elettrone) che i vettori \mathbf{L} ed \mathbf{S} possano assumere solo determinate posizioni reciproche, in modo che l'energia addittiva ΔE_J risulti quan-

tizzata ossia assuma solo determinati valori tanti quanti sono i valori possibili dell'angolo tra \mathbf{S} ed \mathbf{L} .

Precisamente occorre ammettere che \mathbf{S} ed \mathbf{L} possano orientarsi tra loro in modo che il vettore risultante $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ (che rappresenta evidentemente il *momento meccanico elettronico totale* dell'atomo) sia quantizzato, ossia il suo modulo possa assumere i valori:

$$\begin{aligned} J &= L + S ; \quad L + S - 1 ; \quad \dots L ; \quad \dots L - S & (\text{se } L > S) , \\ J &= S + L ; \quad S + L - 1 ; \quad \dots S ; \quad \dots S - L & (\text{se } L < S) . \end{aligned}$$

Cioè i valori possibili di J sono rispettivamente $(2S + 1)$ o $(2L + 1)$. [$J = L + S$ e $J = L - S$, sono evidentemente i valori di J nei casi in cui \mathbf{L} ed \mathbf{S} sono rispettivamente paralleli ed antiparalleli]. Altrettanti saranno pertanto i valori dell'energia additiva ΔE_J , e quindi la molteplicità di un livello, in struttura fine, è $(2S + 1)$ o $(2L + 1)$ (astruendo dalle regole di selezione).

L'energia magnetica ΔE_J , dovuta all'esistenza degli spin elettronici, è data dalla relazione:

$$(15) \quad \Delta E_J = A' S L \cos(\widehat{\mathbf{S}\mathbf{L}})$$

(essendo μ_S proporzionale a S , ed il campo H proporzionale a L) dove il coefficiente di proporzionalità A' è il fattore di separazione della quantizzazione fine. L'energia di interazione (15) tra \mathbf{S} ed \mathbf{L} , tenendo conto della relazione di $\cos(\widehat{\mathbf{S}\mathbf{L}})$, assume la forma:

$$(16) \quad \Delta E_J = \frac{A'}{2} \{ J(J + 1) - L(L + 1) - S(S + 1) \} ,$$

che esprime la *legge di separazione della struttura fina* degli spettri.

Con ciò, ove si tenga conto di determinate regole di selezione (trovate empiricamente dai dati spettroscopici e dedotte poi, in alcuni casi, dalla meccanica quantistica) per cui non tutte le transizioni tra due livelli diversi sono possibili, viene spiegata la comparsa della struttura fina degli spettri.

È da notare poi che l'esistenza e la orientazione degli spin elettronici può dedursi, prescindendo da particolari modelli atomici (ipotesi dell'elettrone rotante), come conseguenza analitica di principi molto più generali (meccanica quanto-relativistica di DIRAC).

5. - Struttura iperfina degli spettri ed esistenza di momenti meccanici e magnetici nei nuclei.

Ulteriori perfezionamenti della tecnica spettroscopica (apparecchi ad alto potere risolutivo) hanno mostrato come ogni riga di struttura fina non sia semplice ma presenti a sua volta una struttura complessa (*struttura iperfina* degli spettri),

L'interpretazione teorica del fatto conduce a due cause determinanti:

- 1) isotopia dei nuclei degli atomi emittenti;
- 2) esistenza di momenti meccanici (spin) e magnetici nei nuclei atomici.

Ci soffermeremo su quest'ultimo fatto, notando anzitutto come l'esistenza di momenti nucleari possa intuirsi dal fatto che le particelle elementari costituenti i nuclei (protoni, neutroni) sono dotate, come si prova con esperienze dirette, di momenti intrinseci.

Riprendendo il modello vettoriale già visto per i momenti della nube elettronica dell'atomo, attribuiamo al nucleo uno *spin* rappresentato da un vettore \mathbf{I} il cui modulo — in unità $\hbar/2\pi$ — sia un numero intero od intero $+1/2$ (infatti 1 è la somma vettoriale degli spin delle particelle nucleari, ognuno dei quali ha valore $1/2$ e può orientarsi, rispetto ai rimanenti spin, o parallelamente od antiparallelamente). Allo spin, nel nucleo assimilabile ad un dipolo magnetico, risulta pertanto associato un *momento magnetico nucleare* μ_I . Si avrà quindi, con ragionamento analogo a quello fatto per i momenti elettronici, per ogni livello di struttura fine una *energia magnetica addittiva* ΔE_I e quindi una molteplicità dei livelli stessi (struttura iperfine).

Per spiegare i dati sperimentali occorre poi ammettere, come nel caso dei momenti elettronici, che i vettori \mathbf{I} (momento meccanico del nucleo) ed \mathbf{J} (momento meccanico totale degli elettroni) possano assumere solo determinate posizioni reciproche in modo che l'energia ΔE_I risulti quantizzata, assuma cioè solo determinati valori, tanti quanti sono i valori possibili dell'angolo tra \mathbf{I} ed \mathbf{J} .

Precisamente occorre ammettere che \mathbf{I} ed \mathbf{J} possano orientarsi tra loro in modo che il vettore risultante $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ (che rappresenta evidentemente il *momento meccanico totale* dell'atomo) sia quantizzato, ossia il suo modulo assuma solo i valori:

$$\begin{aligned} F &= J + I; \quad J + I - 1; \quad \dots J; \quad \dots J - I & (\text{se } J > I), \\ F &= I + J; \quad I + J - 1; \quad \dots I; \quad \dots I - J & (\text{se } J < I), \end{aligned}$$

cioè i valori possibili di F sono rispettivamente $(2I + 1)$ o $(2J + 1)$; altrettanti saranno perciò i valori dell'energia addittiva ΔE_I per il livello caratterizzato dai numeri quantici I ed J ; in altre parole, a prescindere dalle regole di selezione, la molteplicità di un termine di struttura iperfine è $2I + 1$ o $2J + 1$.

Essendo

$$\mu_I = \mathbf{I} \cdot \mathbf{g}(I),$$

(dove $g(I)$ è un numero puro, funzione della struttura interna del nucleo, ed in generale molto piccolo) ed ammettendo che l'energia magnetica addittiva dovuta all'interazione tra μ_I e μ_J , sia proporzionale al prodotto scalare $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$

(in analogia alla formula che nella meccanica ordinaria dà l'energia di interazione di due dipoli) otteniamo per ΔE_I l'espressione:

$$(17) \quad \Delta E_I = A I J \cos(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}),$$

dove il coefficiente di proporzionalità A è il fattore di separazione della struttura iperfina.

L'energia (17) di interazione tra \mathbf{I} ed \mathbf{J} , tenendo conto del valore quantistico di $\cos(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}})$ si scrive:

$$(18) \quad \Delta E_I = \frac{A}{2} \{ F(F+1) - J(J+1) - I(I+1) \},$$

che esprime la *legge di separazione per la struttura iperfina*.

Con l'ipotesi dei momenti nucleari resta dunque spiegata la comparsa della struttura iperfina degli spettri. Da quanto abbiamo fin qui esposto possiamo dunque dire che l'energia di un livello di struttura iperfina è data da:

$$(19) \quad W_{tot} = W_{n,e} + \Delta E_J + \Delta E_I = W_{n,e} + A' S L \cos(\widehat{\mathbf{S}\mathbf{L}}) + A I J \cos(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}})$$

(dove $W_{n,e}$ è l'energia elettrostatica di interazione tra nucleo ed elettroni dell'atomo).

La separazione tra i vari termini di una struttura fina dipende dal fattore A' , mentre la separazione tra i termini di una struttura iperfina dipende dal fattore A ; entrambi variano da multipletto a multipletto.

I fattori A' ed A si possono determinare sperimentalmente dalla separazione delle righe spettrali corrispondenti: si trova così per A un valore assai più piccolo che per A' (poichè le distanze tra i termini di una struttura fina sono assai maggiori che non i termini di una struttura iperfina); cioè, per le (15) e (17), la energia di interazione ΔE_J , tra i momenti $\boldsymbol{\mu}_I$ e $\boldsymbol{\mu}_S$ è \gg dell'energia di interazione tra $\boldsymbol{\mu}_I$ e $\boldsymbol{\mu}_J$. (Questo fatto del resto è chiaro ove si osservi che i momenti magnetici della nube elettronica sono dell'ordine del magnetone di BOHR, mentre i momenti magnetici nucleari sono dell'ordine del magnetone nucleare (1 magnetone nucleare = $\sim 1/1840$ del magnetone di BOHR; momento magnetico dell'elettrone = 1 magnetone di BOHR).

6. — Struttura iperfina “anomala” ed esistenza di momenti di quadrupolo elettrico nei nuclei.

Come già, cronologicamente, determinate caratteristiche degli spettri (struttura fina; struttura iperfina) avevano condotto all'ipotesi dei momenti meccanici e magnetici degli elettroni e dei nuclei, così ulteriori particolarità spettroscopiche (struttura iperfina «anomala») hanno successivamente condotto ad ammettere l'esistenza nei nuclei atomici anche di momenti elettrici.

Nel corso di ricerche spettroscopiche con apparecchi ad alto potere separatore, alcuni ricercatori avevano notato piccole irregolarità nella posizione delle componenti le strutture iperfine degli spettri di alcuni atomi; precisamente tali componenti apparivano spostate — verso l'« alto » o verso il « basso » — di valori assoluti comunque piccoli, rispetto alle posizioni che dovevano aspettarsi teoricamente (v. legge di separazione delle strutture iperfine).

Il numero di atomi presentanti tale particolarità (struttura iperfine « anomala ») si rivelò presto abbastanza elevato. Ma poichè nei casi osservati erano da escludersi disturbi di origine magnetica da parte dei livelli attigui di strutture iperfine, le deviazioni dalla normale legge di separazione rimasero, in un primo tempo, inesplicabili.

Si deve a SCHÜLER e SCHMIDT l'idea che queste deviazioni si potessero spiegare ritenendo che i nuclei non abbiano tutti simmetria sferica — come per semplicità si era sempre supposto — ma una buona parte presentino una simmetria di rotazione attorno ad un asse, ossia posseggano un momento di quadrupolo elettrico q diverso da zero.

Il ragionamento, qualitativamente è questo: l'energia W_{tot} di un livello di struttura iperfine risulta, come s'è visto:

$$(20) \quad W_{tot} = W_{n,e} + \Delta E_J + \Delta E_I.$$

La transizione tra due livelli energetici di questo tipo dà origine all'emissione, da parte dell'atomo, di una riga spettrale di struttura iperfine. Nella (20) il termine $W_{n,e}$ (energia di interazione coulombiana tra nucleo ed elettroni) era sempre stato calcolato considerando il nucleo come una carica puntiforme, vale a dire ammettendo che la distribuzione spaziale effettiva della carica nucleare avesse forma sferica ($q = 0$).

Se ora la posizione delle righe spettrali calcolate attraverso la (20) non corrisponde in certi casi alla realtà sperimentale, dal momento che — come si è detto — sono da escludersi disturbi di origine magnetica (termini ΔE_J e ΔE_I) risulta che occorre fissare l'attenzione proprio sul termine $W_{n,e}$.

Il valore di questo termine dipende evidentemente dalla forma del nucleo; scartiamo allora l'ipotesi prima ammessa che il nucleo abbia simmetria sferica e supponiamolo per il resto di forma qualsiasi; possiamo anzi supporre, in questo ordine di idee, che il nucleo abbia simmetria di rotazione attorno ad un asse — che si suole assumere coincidente con la direzione dello spin del nucleo — e ciò per semplicità poichè in questo modo la forma del nucleo si può completamente caratterizzare mediante il valore del suo momento di quadrupolo effettivo (e del resto questa semplificazione di forme è giustificata *a posteriori* dai risultati che si ottengono, in perfetto accordo con l'esperienza).

Se dunque abbiamo una carica nucleare avente *simmetria non sferica*,

l'energia $W_{n,e}$ di interazione elettrostatica tra nucleo ed elettroni risulta — come s'è visto precedentemente — somma di una successione di termini:

$$(21) \quad W_{n,e} = W_{n,e}^{(1)} + W_{n,e}^{(2)} + W_{n,e}^{(3)} + \dots,$$

ossia, tralasciando i termini superiori al 3° (termine di quadrupolo) che sono trascurabili, e ricordando che il 2° (termine di dipolo) è nel nostro caso $= 0$, risulta:

$$(22) \quad W_{n,e} = W_{n,e}^{(1)} + W_{n,e}^{(3)}.$$

Ora il primo termine della (22) — $W_{n,e}^{(1)}$ — rappresenta l'energia di interazione coulombiana tra elettroni e nucleo *sferico* (assimilabile cioè ad una carica *puntiforme*), ossia non è altro che il valore prima assunto per $W_{n,e}$.

È chiaro pertanto da tutto ciò come la formula (20) in cui si faceva $W_{n,e} = W_{n,e}^{(1)}$ bene si prestasse a interpretare i risultati sperimentali nel caso di atomi a nucleo sferico ($q = 0$), mentre cadeva in difetto nel caso di nuclei con simmetria asferica, aventi cioè un momento di quadrupolo elettrico non nullo. Se invece si assume per $W_{n,e}$ — anziché il valore approssimato $W_{n,e}^{(1)}$ — il valore (22), comprendente l'energia addittiva $W_{n,e}^{(3)}$ di quadrupolo, la (20) dovrà rendere conto dei risultati sperimentali *in ogni caso*, fornendo un valore *più esatto* dell'energia W_{tot} di un livello di struttura iperfine e quindi la reale posizione delle righe spettrali.

Queste considerazioni, che svolgeremo quantitativamente e preciseremo nei prossimi paragrafi, hanno trovato piena conferma nell'esperienza.

Abbiamo così visto brevemente la genesi (struttura iperfine « anomala »), i principi e le conclusioni della teoria, conclusioni che possiamo così riassumere: *i nuclei atomici possiedono — in molti casi — momenti di quadrupolo elettrico non nullo ($q \geq 0$); possiamo cioè rappresentarceli (in base al segno di q) in forma di sfera, o di ellissoide di rotazione allungato, o di ellissoide appiattito in direzione dello spin; la misura del grado di deviazione di un nucleo dalla simmetria sferica è poi fornito dal valore assoluto di q ⁽²⁾.*

(2) Occorre notare come la « forma del nucleo » di cui andiamo parlando, sia — a rigore — la forma della carica nucleare; tuttavia dato il carattere di saturazione esistente tra protone e neutrone nei nuclei (per cui la distribuzione della massa nucleare è circa simile alla distribuzione della carica) la forma del complesso del nucleo può ritenersi all'incirca la stessa di quella della carica nucleare. Attenendoci a questa precisazione, noi parleremo — nel seguito — semplicemente di « forma del nucleo definita dal suo momento di quadrupolo elettrico q ».

7. — I momenti elettrici in un atomo.

L'atomo è, notoriamente, l'insieme stabile, elettricamente neutro, di due tipi opposti di cariche elettriche:

- la carica nucleare positiva (protoni del nucleo): $+Ze$;
- la carica elettronica negativa (elettroni dell'atomo): $-Ze$.

I neutroni — facenti parte del nucleo — non danno all'atomo che un apporto di massa (agli effetti della teoria dei quadrupoli nucleari non ha nessuna importanza il fatto che in realtà vi sia o meno nel nucleo un continuo scambio protone \rightleftharpoons neutrone, poichè la carica media del nucleo rimane comunque costante ($=Ze$).

Si hanno dunque nell'atomo due distribuzioni di cariche elettriche per ciascuna delle quali possiamo immaginare piuttosto che una composizione granulare, una continua; e ciò tenendo conto del fatto che — entro l'atomo — il dualismo onda-corpuscolo tende a risolversi in favore della prima. Infatti i protoni, i neutroni e gli elettroni che fuori dell'atomo hanno per lo più una definita apparenza corpuscolare, quando si trovano conglobati a costituire un atomo sfumano — per così dire — i propri contorni ed il modo più obiettivo — se purè meno intuitivo — di descriverli è quello probabilistico della meccanica quantistica.

Di modo che la « densità di probabilità » dei protoni o degli elettroni può, in un certo modo, rappresentarci la densità media della carica nucleare od elettronica dell'atomo.

Possiamo dunque trasferire alle due distribuzioni di carica che formano l'atomo, i concetti e le proprietà già viste precedentemente per le distribuzioni macroscopiche di elettricità.

Potremo in particolare considerare il nucleo come una carica avente un certo volume ed una certa forma, descritta e misurata quest'ultima dal momento elettrico q_n ; lo stesso per la nuvola elettronica dell'atomo.

Ora di tali momenti elettrici hanno interesse solo i primi due — di dipolo e di quadrupolo — essendo tutti gli altri, come si è già visto, di valore trascurabile. Dei due suddetti momenti poi, quello di *dipolo*, è sempre *nullo*, pel fatto che la carica nucleare e quella elettronica possiedono un centro di simmetria. Restano quindi solo da considerare in un atomo i momenti di quadrupolo, il cui valore basta pertanto da solo a descriverci compiutamente la forma del nucleo o della nuvola elettronica.

Di essi parleremo ora separatamente.

a) *Momento di quadrupolo elettrico del nucleo.* — Abbiamo già spiegato le ragioni per cui si deve ammettere che i nuclei abbiano — in parte almeno — forme diverse da quella sferica; e precisamente si è detto che è necessario e sufficiente ammettere che i nuclei possiedano in generale simmetria di rota-

zione attorno ad un asse (che si suol assumere coincidente con la direzione dello spin **I** del nucleo); in particolare questa simmetria può essere quella sferica.

Si deve, in altri termini, ammettere l'esistenza nei nuclei di un momento di quadrupolo elettrico $q_n \gtrless 0$.

Determinato sperimentalmente il valore di q_n , esso basta a descrivere il tipo e grado di simmetria della carica nucleare, ossia (v. la precisazione fatta in nota al n. 6) la forma del nucleo.

Si ha precisamente — come già si è visto — il quadro seguente:

momento di quadrupolo elettrico nucleare	$q_n = 0$	Il nucleo ha forma di <i>sfera</i>
momento di quadrupolo elettrico nucleare	$q_n < 0$	il nucleo ha forma di <i>ellissoide</i> di rotazione allungato in direzione dello spin.
momento di quadrupolo elettrico nucleare	$q_n < 0$	il nucleo ha forma di <i>ellissoide</i> di rotazione appiattito in direzione dello spin.

I vari casi sono rappresentati graficamente nelle fig. 3, che devono intendersi di rotazione attorno all'asse z (direzione dello spin **I**).

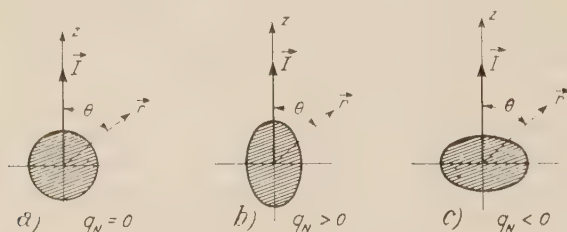


Fig. 3.

L'effettiva determinazione del valore di q_n per i vari nuclei si compie sperimentalmente coi metodi che descriveremo.

Una determinazione puramente teorica del valore di q_n è — oggi almeno — praticamente impossibile; ricordando infatti come si calcolano i valori medi secondo la meccanica quantistica, si ha che il valore di $q_n = \overline{r_n^2(3 \cos^2 \theta_n - 1)}$ è fornito dall'integrale:

$$(23) \quad q_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \psi_n dS,$$

dove ψ_n è l'autofunzione del nucleo in esame ($\psi_n \psi_n^* =$ densità di probabilità).

Senonchè oggi non si conoscono, in generale, nemmeno in forma approssimata, le espressioni delle autofunzioni nucleari, sia per la natura ancora ipotetica delle forze nucleari, sia per le gravi difficoltà matematiche che si incontrerebbero.

La determinazione sperimentale rimane dunque, per ora, l'unico modo per ottenere il momento di quadrupolo elettrico di un nucleo.

b) *Momento di quadrupolo elettrico della nuvola elettronica.* — La valutazione del momento di quadrupolo della nuvola elettronica si riduce — in base alla definizione stessa di q_e — al calcolo dell'integrale:

$$(24) \quad q_e = \overline{r_e^2(3 \cos^2 \theta_e - 1)} = \int_{\infty} \psi_e^* r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \psi_e dS,$$

calcolo che può effettuarsi qualora siano note le autofunzioni ψ_e dei vari stati e configurazioni elettronici.

La (24) fornisce dunque in valore e segno il momento q_e di quadrupolo; d'altra parte una valutazione *qualitativa* dello stesso momento q_e si può avere semplicemente in base all'esame della funzione $\psi_e \psi_e^*$ (distribuzione della probabilità elettronica). Infatti essendo — come si è già detto — la distribuzione della carica elettronica rappresentata in certo modo dalla distribuzione di probabilità $\psi_e \psi_e^*$, dal semplice esame del tipo di simmetria di questa funzione, può dedursi se il momento di quadrupolo q_e relativo è ≥ 0 . Ricorrendo anzi alla rappresentazione grafica della funzione $\psi_e \psi_e^*$ può aversi una efficace immagine della forma della nuvola elettronica in relazione al suo momento di quadrupolo; e precisamente, assumendo l'asse z di simmetria della nube elettronica coincidente con la direzione del suo momento meccanico \mathbf{J} , si avrà per $q_e = \overline{3z_e^2 - r^2}$ il solito quadro:

$q_e = 0$: la corteccia elettronica dell'atomo ha *simmetria sferica*;

$q_e > 0$: la corteccia elettronica dell'atomo ha *simmetria di rotazione* allungata nella direzione di \mathbf{J} ;

$q_e < 0$: la corteccia elettronica dell'atomo ha *simmetria di rotazione* appiattita nella direzione di \mathbf{J} .

Per esempio prendiamo il caso di un atomo idrogenoide; ogni stato della nuvola elettronica è definito — come è noto — da un'autofunzione ψ del tipo:

$$(25) \quad \psi = Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot R_{nl}(r),$$

dove la funzione radiale $R(r)$, dipendendo dalla legge della forza cui l'elettrone è soggetto, è diversa nei vari casi; mentre le funzioni sferiche superficiali $Y(\theta, \varphi)$ sono comuni a tutti i problemi.

Ricordando allora le espressioni delle $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot \exp [i\varphi];$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot \exp -[i\varphi]; \quad \text{ecc.}$$

si ha subito che:

— *gli stati s ($l=0$) hanno nuvola di carica simmetricamente sferica* ($\psi_e \psi_e^* = (1/4\pi) R R^* = f(r)$); dunque per gli stati s è: $q_e = 0$;

— *gli stati successivi p, d, \dots ($l=1, 2, \dots$) hanno nuvola di carica non simmetricamente sferica* ($\psi_e \psi_e^* = F(\theta, \varphi, r)$); dunque per tutti gli stati successivi è: $q_e \neq 0$ ⁽³⁾.

A titolo di esempio riportiamo in fig. 4 la forma della corteccia elettronica corrispondente a tre diversi casi di q_e (ci riferiamo per semplicità alle ψ_e di SCHRÖDINGER).

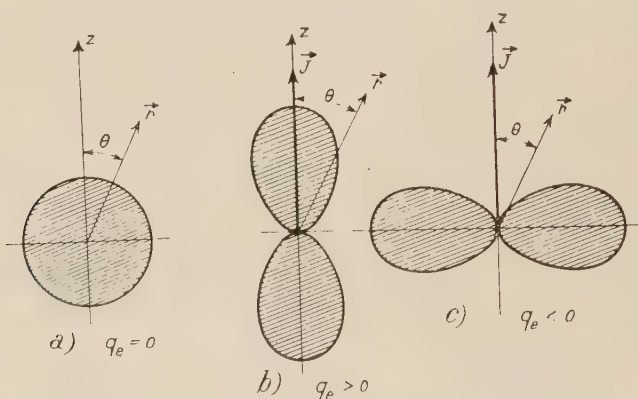


Fig. 4.

a) [stato s ($l=0$)] b) [stato p ($l=1; m=0$)] c) [stato p ($l=1; m=\pm 1$)]

La fig. 4 a) rappresenta uno stato s della corteccia elettronica ($\psi_e \psi_e^* = f(r)$; $\psi_e \psi_e^*$ non dipende nè da θ nè da φ : simmetria sferica).

La fig. 4 b) rappresenta uno stato p con $m=0$ ($\psi_e \psi_e^* = (3/4\pi) \cos^2 \theta \cdot R R^* = f(r) \cos^2 \theta$; $\psi_e \psi_e^*$ non dipende da φ : simmetria di rotazione attorno all'asse z).

⁽³⁾ Notiamo che se per ψ_s prendiamo, anzichè l'espressione (25) della meccanica quantistica di SCHRÖDINGER, quella fornita dalla meccanica quanto-relativistica di DIRAC (che tiene conto dello spin) non tutti gli stati p risultano avere momento $q_e \neq 0$. Infatti, per lo stato $p_{1/2}$ ($l=1; j=1/2$) risulta subito che $\psi_e \psi_e^* = \varphi(r)$, cioè la nuvola di probabilità ha simmetria sferica e quindi lo stato suddetto possiede, nella teoria di DIRAC, momento $q_e = 0$.

La fig. 4 c) rappresenta uno stato p con $m = \pm 1$ ($\psi_e \psi_e^* = (3/8\pi) \sin^2 \theta \cdot RR^* = (1/2)f(r) \sin^2 \theta$; $\psi_e \psi_e^*$ non dipende da φ : simmetria di rotazione attorno a z).

(Le figure non rappresentano in fondo che la dipendenza di $\psi_e \psi_e^*$ da θ (la $f(r)$, funzione del solo raggio vettore r non interessa) ossia il tipo di simmetria della distribuzione di carica).

Come si vede la conoscenza della « forma » della corteccia elettronica dell'atomo permette, con la sua plastica evidenza, una valutazione qualitativa immediata del momento di quadrupolo; naturalmente per avere quantitativamente il valore esatto di q_e occorre calcolarlo attraverso la (24).

8. - Interazione elettrostatica tra nucleo ed elettroni in un atomo.

a) *Generalità.* - Dato un atomo, l'energia di un suo stato qualsiasi consta notoriamente di due termini:

1) energia elettrostatica $W_{n,e}$ dovuta all'attrazione coulombiana tra nucleo ed elettroni;

2) energia magnetica ΔE_F dovuta all'interazione dei momenti magnetici dell'atomo; di essa abbiamo già trattato precedentemente ($\Delta E_F = \Delta E_J + \Delta E_I$). Cioè l'energia di un generico livello è data da:

$$W_{tot} = W_{n,e} + \Delta E_J + \Delta E_I.$$

Vogliamo ora esaminare in modo approfondito questo termine $W_{n,e}$; nel numero successivo applicheremo i risultati ottenuti alla spiegazione della struttura iperfina « anomala » degli spettri.

Si abbia dunque un nucleo in presenza della nuvola elettronica dell'atomo. Il nucleo abbia forma qualsiasi; anzi per semplicità possiamo supporre in generale che esso abbia simmetria di rotazione attorno ad un asse (che si suole prendere coincidente con lo spin I); in particolare la simmetria può essere quella sferica. La semplificazione ora introdotta permette, come si sa, di descrivere completamente la forma di un nucleo mediante il suo momento di quadrupolo q_n ; del resto — oltre che giustificata *a posteriori* dai risultati che si ottengono, in perfetto accordo con l'esperienza — tale ipotesi è la più semplice e quindi la più naturale. Prendendo allora come punto di riferimento il centro di simmetria del nucleo, siano:

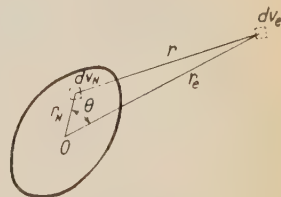


Fig. 5.

$+e \cdot \rho_n(r_n)$ = densità della carica nucleare;
 $-e \cdot \rho_e(r_e)$ = densità della carica elettronica;

dv_n e dv_e = elemento di volume rispettivamente nello spazio occupato dal nucleo e dagli elettroni;
 r = distanza tra dv_n e dv_e .

L'energia di interazione elettrostatica tra nucleo e nube elettronica è allora notoriamente fornita dall'integrale:

$$(28) \quad W_{n,e} = \int_{\infty} \frac{-e^2 \cdot \rho_n(r_n) \rho_e(r_e)}{r} dv_n dv_e$$

Per meglio esaminare il significato, scindiamo al solito questa energia $W_{n,e}$ in una successione di termini:

$$(27) \quad W_{n,e} = W_{n,e}^{(1)} + W_{n,e}^{(2)} + W_{n,e}^{(3)} + \dots,$$

mediante lo sviluppo secondo funzioni sferiche del fattore $1/r$. Come si è già visto, si ha:

$$(26) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_e \sqrt{1 - 2 \frac{r_n}{r_e} \cos \theta + \left(\frac{r_n}{r_e}\right)^2}} = \frac{1}{r_e} + \frac{r_n}{r_e^2} \cos \theta + \frac{r_n^2}{2r_e^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Sostituendo questa espressione di $1/r$ nella (26) si ottiene:

$$(29) \quad W_{n,e} = -e^2 \int \frac{\rho_n \cdot \rho_e}{r_e} dv_n dv_e - e^2 \int \frac{\rho_n \cdot \rho_e}{r_e^2} r_n \cos \theta dv_n dv_e - \\ - e^2 \int \frac{\rho_n \cdot \rho_e}{2r_e^3} r_n^2 (3 \cos^2 \theta - 1) dv_n dv_e - \dots$$

In base all'analisi già fatta — in generale — in precedenza, si ha che:

— *il primo termine* della (29) è l'energia di interazione coulombiana tra elettroni e nucleo, supposta la carica di quest'ultimo puntiforme (concentrata nel punto O), ossia attribuendo alla carica effettiva una simmetria sferica. Questo termine (\gg in valore assoluto di tutti i successivi) rappresenta in prima approssimazione l'energia complessiva $W_{n,e}$;

— *il secondo termine* è l'energia di interazione coulombiana tra elettroni e nucleo dovuta al momento di dipolo elettrico di quest'ultimo; avendo supposto che il nucleo possieda un centro di simmetria, questo termine risulta *nullo*;

— *il terzo termine* è l'energia coulombiana dovuta al momento di quadrupolo elettrico del nucleo.

I termini successivi, dato il loro valore trascurabile, non hanno interesse pratico; la (29) può dunque scriversi:

$$(30) \quad W_{n,e} = W_{np,e} + \Delta W_e,$$

SOC. DR. ING. *M. Tieghi & C.*

MILANO

VIA ARPESANI 3 - TEL. 21-743 - 272-647

APPARECCHI MISURA
E CONTROLLO TERMICO

- Controllo combustione
- Misuratori portata sist. Ventur per alte pressioni statiche

- Misuratori portata sist. Venturi a bilancia idrostatica per basse e bassissime pressioni statiche
- Analizzatori gas combusti
- Pirometri e Termometri elettrici
- Telelivelli

Fratelli Koristka
DI I. KORISTKA & C.

MILANO, Via Ampère 43

Telef. 292.445 - 292.859

- Microscopi monoculari e binoculari d'ogni tipo e per ogni ricerca (biologici, mineralogici, metallografici, ecc.).
- Modello speciale binoculare con tavolino traslatore ad ampi spostamenti ortogonali controllati a 10μ per l'esame delle tracce dei raggi Alfa.
- Microscopi per osservazione a contrasto di fase, sia monoculari che binoculari, col più esteso corredo di obbiettivi.
- Obbiettivi fotografici e da proiezione.
- Microscopi stereoscopici a grande campo.
- Specchietti per galvanometro, ecc.

[28-II-50]

OSSIDAZIONE ANODICA
INCISIONI CHIMICHE
LITOGRAFIA

**TARGHE
PLACCHE**

LAVORAZIONI IN SMALTO
FUSIONI

BALLAN & BUTTI
C/ MAGENTA 76 - MILANO
TELEF. 482-473 - 45-549

PANNELLI E QUADRANTI PER QUALSIASI TIPO
DI APPARECCHIO SCIENTIFICO

[30-11-1950]

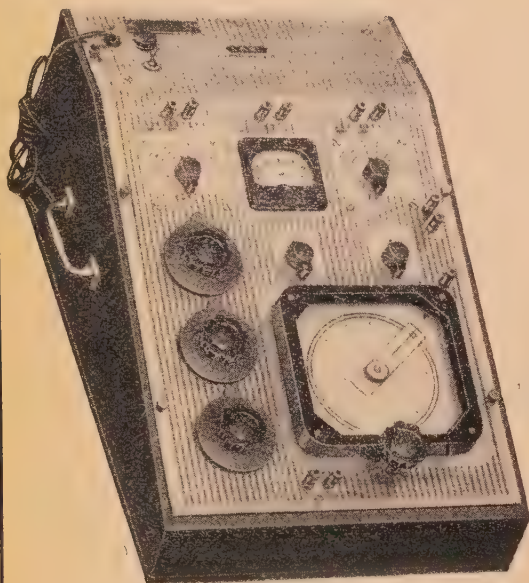
LAEL

MILANO

S. R. L.

LABORATORI COSTRUZIONE STRUMENTI ELETTRONICI

MILANO - CORSO XXII MARZO, 6 - TEL. 585.662



PONTE D'IMPEDENZA Mod. 650

CARATTERISTICHE.

Resistenza: da $1,0 \Omega$ a $1 M\Omega$
 Capacità: da $10 pF$ a $100 \mu F$
 Fattore di potenza R/X da $2 \cdot 10^{-3}$ a 1
 Induttanza: da $2 \mu H$ a $100 H$
 Fattore di merito (Q) da 0,02 a 1000.

Precisione. — Nelle misure di resistenza e capacità $\pm 1\%$. Nelle misure di induttanza $\pm 2\%$.

Alimentazione. — Il mod. 650 è provvisto di generatore interno a 1000 Hz composto di una valvola 6 N 7 e di una 5 Y 3. Il generatore è provvisto di cambiatensioni universale per tensioni di rete — 110, 125, 140, 160, 220 volt. 40-60 Hz. Potenza assorbita circa 40 VA. Inoltre è prevista una pila a secco per misure di resistenza in corrente continua.

Generatore esterno. — Due appositi morsetti sono previsti per l'eventuale uso di un generatore esterno, il ponte si presta per alimentazione sino a 10 000 Hz. La graduazione del quadrante principale è indipendente dalla frequenza. Quella dei quadranti «fattore di merito» e «fattore di potenza» va moltiplicata per la frequenza di alimentazione usata, espressa in kHz. Occorre prestar attenzione alla capacità verso terra del generatore che può causare errori.

Esecuzione. — In cofanetto a leggio in legno lucido interamente schermato. Pannello frontale in alluminio inciso ed ossidato. Quadranti argentati.

Dimensioni. — $520 \times 330 \times 220$ mm.

Peso. — Kg. 9,600 completo di pila.

REALIZZAZIONE. — Il ponte 650 è un classico ponte di impedenza a quattro bracci. Una particolarità costruttiva interessante consiste in un sistema di commutatore che selezionando le prestazioni dello strumento permette di trasformarlo successivamente in ponte Wheatstone, in ponte-Hay e di Maxwell per misure di induttanza, ponte di capacità, resistenza serie-parallelo. Consente la lettura diretta, in un'ampia gamma di valori, di resistenze in corrente continua e a 1000 Hz di capacità, fattore di potenza, induttanza e fattore di merito. Tutte le indicazioni sono riportate da un'unica graduazione decimale, su di un'ampia scala. Un moltiplicatore di scala completa le indicazioni. Per il fattore di potenza e il fattore di merito sono previsti quadranti separati.

Per le misure di capacità e induttanza i campioni di riferimento interni sono condensatori a mica, tali quindi da dare il maggior affidamento in quanto a stabilità, precisione e bassissimo angolo di perdita.

In un apposito scompartimento trova posto, completamente schermato, un generatore a due tubi elettronici per la frequenza di 1000 Hz alimentato dalla rete a corrente alternata.

**GENERATORI AF e BF - ANALIZZATORI - MODULATORI
OSCILLOGRAFI - PONTI R. C. L. - TACHIMETRI
STROBOSCOPICI - VOLTMETRI ELETTRONICI - ONDAMETRI**

ING. S. BELOTTI & C. S. A.

Telegrammi:

INGBELOTTI-MILANO

MILANO

Piazza Trento, 3

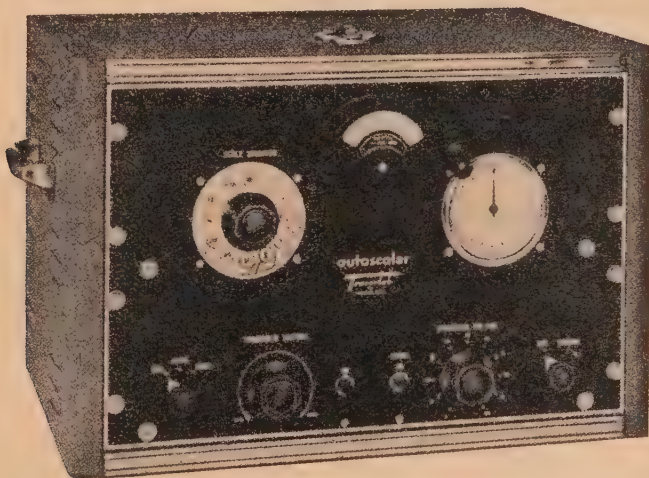
Telef.: 52.051 - 52.052

52.053 - 52.020

GENOVA Via G. D'Annunzio 1-7
Tel. 52-309**ROMA** Via del Tritone 201
Tel. 61-709**NAPOLI** Via Medina 61
Telef. 23-279

STRUMENTI
PER
RADIOATTIVITÀ

Tracertab →



CONTATORE SC-1A AUTOSCALER

- Rivelatori di radioattività, portatili e da laboratorio, di precisione, industriali, indicatori, registratori, totalizzatori.
- Strumenti per l'applicazione industriale della radioattività (dosimetri, spessimetri, ricercatori, ecc.)
- Preparati radioattivi campionati - Radioisotopi.
- Assorbenti per misure di assorbimento e penetrazione radioattiva.
- Tubi di Geiger-Müller sensibili, ultra sensibili, per raggi gamma, beta, X.
- Utensili ed accessori per il trattamento di elementi radioattivi.

LISTINI E INFORMAZIONI A RICHIESTA

CARLO ERBA

SEZIONE APPARECCHI SCIENTIFICI

IMPIANTI COMPLETI
DI LABORATORI CHIMICI,
FARMACEUTICI, BATTERIOLOGICI

SEZIONE PRODOTTI per LABORATORI

PRODOTTI C. G. S.

purissimi per analisi di precisione

PRODOTTI P.

puri per analisi

PRODOTTI T. P.

tecnicamente puri

avendo indicato con $W_{np,e}$ il primo integrale (energia nucleo puntiforme-elettroni) e con ΔW_q il terzo (energia di quadrupolo). Vediamo dunque che l'energia di interazione coulombiana tra nucleo ed elettroni dell'atomo dipende — a parte il termine $W_{np,e}$ — essenzialmente dal termine di quadrupolo.

b) *Energia di quadrupolo.* — L'energia:

$$(31) \quad \Delta W_q = -e^2 \int \frac{\rho_n \rho_e}{2r^3} r_n^2 (3 \cos^2 \theta - 1) dv_n dv_e$$

è dunque il contributo, al valore complessivo di $W_{np,e}$ dovuto all'esistenza di un momento di quadrupolo nel nucleo; esso sarà quindi senz'altro nullo se il nucleo possiede simmetria sferica.

Si tratta ora di calcolare esplicitamente questa energia ΔW_q . Evidentemente la (31) — che la definisce — non può in pratica usarsi; noi seguiremo

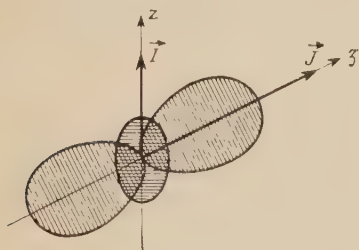


Fig. 6.

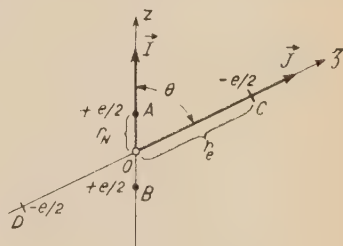


Fig. 7.

perciò un procedimento più semplice e schematico, ricorrendo al modello strutturalistico dell'atomo descritto nel n. 7.

Infatti noi possiamo rappresentarci un atomo come in fig. 6, dove al solito la carica nucleare e quella elettronica — concentriche — hanno simmetria di rotazione l'una attorno ad \mathbf{I} , l'altra attorno ad \mathbf{J} (in figura si è posto $q_n > 0$ e $q_e > 0$; ciò evidentemente è inessenziale circa la generalità del procedimento).

Orbene, osservando che una carica elettrica attorno ad un asse può — grosso modo — considerarsi equivalente a due mezze cariche poste sull'asse a distanza conveniente, noi possiamo schematizzare il modello atomico rappresentato in fig. 6 semplicemente come in fig. 7. (La carica $(-e)$ della nuvola elettronica può schematizzarsi con due mezze cariche $(-e/2)$ disposte sull'asse \mathbf{J} a distanza $\pm r_e$ dal centro O dell'atomo.

Analogamente — supponendo per semplicità che la forma asferica del nucleo sia dovuta ad uno solo dei suoi protoni $(+e)$ (mentre tutti i rimanenti $(Z-1)$ protoni sono disposti, nel volume nucleare, con simmetria sferica attorno al centro O) — possiamo schematizzare la carica nucleare con una

carica puntiforme $+(Z-1) \cdot e$ posta in O e due mezze cariche $(+e/2)$ disposte sull'asse I a distanze $\pm r_n$ da O) ⁽⁴⁾.

In base al modello schematico di fig. 7 possiamo allora calcolare subito l'energia $W_{n,e}$ di interazione coulombiana tra nucleo ed elettroni; essa è evidentemente:

$$W_{n,e} = \left(-\frac{e(Z-1)}{CO} \frac{e}{2} - \frac{e/2}{CA} \frac{e}{2} - \frac{e/2}{BC} \frac{e}{2} \right) + \left(-\frac{e(Z-1)}{DO} \frac{e}{2} - \frac{e/2}{DA} \frac{e}{2} - \frac{e/2}{DB} \frac{e}{2} \right)$$

ossia, essendo (v. figura)

$$\begin{aligned} \overline{CO} &= \overline{DO} = r_e \\ \overline{CA} &= \overline{DB} = \sqrt{r_e^2 - 2r_n r_e \cos \theta + r_n^2} \\ \overline{CB} &= \overline{DA} = \sqrt{r_e^2 + 2r_n r_e \cos \theta + r_n^2} \end{aligned}$$

si ha:

$$(32) \quad W_{n,e} = -\frac{(Z-1)e^2}{r_e} - \frac{e^2/2}{\sqrt{r_e^2 - 2r_n r_e \cos \theta + r_n^2}} - \frac{e^2/2}{\sqrt{r_e^2 + 2r_n r_e \cos \theta + r_n^2}}.$$

Sviluppiamo al solito secondo funzioni sferiche:

$$\begin{aligned} (33) \quad W_{n,e} &= -\frac{(Z-1)e^2}{r_e} - \frac{e^2}{2r_e} \left\{ 1 - \frac{r_n}{r_e} \cos \theta + \frac{r_n^2}{2r_e^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right\} - \\ &\quad - \frac{e^2}{2r_e} \left\{ 1 + \frac{r_n}{r_e} \cos \theta + \frac{r_n^2}{2r_e^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right\} = \\ &= -\frac{(Z-1)e^2}{r_e} - \frac{e^2}{r_e} - \frac{e^2 r_n^2}{2r_e^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Si ha dunque in definitiva:

$$(34) \quad W_{n,e} = -\frac{Ze^2}{r_e} - \frac{e^2 r_n^2}{2r_e^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

È questa l'energia elettrostatica di interazione tra nucleo ed elettroni; essa consta di due termini ⁽⁵⁾:

— il primo: $-(Ze^2/r_e) = -e \cdot (Ze/r_e)$ è evidentemente l'energia coulomb-

⁽⁴⁾ Se, anzichè da una carica (protone), la simmetria asferica del nucleo è creata da n protoni, il modello schematico di fig. 7 si estende ovviamente immaginando gli n protoni che si estraneano dalla disposizione simmetricamente sferica degli altri $(Z-n)$, dimezzati e disposti sull'asse I a distanza $\pm r_{n_p}$ da O ($v = 1, 2, \dots, n$). Analogamente per gli elettroni.

⁽⁵⁾ È opportuno notare come nello sviluppo (33) della $W_{n,e}$ si siano automaticamente eliminati i termini in $\cos \theta$ (termini di dipolo elettrico).

Ciò dipende pur sempre dal fatto che il modello atomico su cui il calcolo è stato fatto, possiede un centro di simmetria.

biana di interazione tra elettroni e nucleo puntiforme (tutta la carica $+Ze$ concentrata in O);

— *il secondo*: $-(e^2 r_n^2 / 2 r_e^3)(3 \cos^2 \theta - 1) = -e \cdot (e r_n^2 / 2 r_e^3)(3 \cos^2 \theta - 1)$ è evidentemente l'energia dovuta alla esistenza di un momento di quadrupolo elettrico nucleare $q_n = \overline{r_n^2(3 \cos^2 \theta_n - 1)}$ (dovuto, nel nostro modello, al protone che si estranea dalla disposizione simmetricamente sferica degli altri $Z-1$).

La (34) coincide, come era naturale, con la (30), cioè:

$$W_{n,e} = W_{np,e} + \Delta W_q.$$

E dunque l'espressione dell'energia di quadrupolo nucleare è ($\theta = \widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}$)

$$(35) \quad \Delta W_q = -\frac{e^2 r_n^2}{2 r_e^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = -\frac{e^2 r_n^2}{2 r_e^3} (3 \cos^2 (\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}) - 1).$$

Possiamo dunque dare a questa espressione una forma più espressiva, facendo comparire nella (35) i momenti di quadrupolo elettrico delle singole cariche nucleare ed elettronica:

$$(36) \quad q_n = \overline{r_n^2(3 \cos^2 \theta_n - 1)} = \overline{3z^2 - r_n^2}$$

$$(37) \quad q_e = \overline{r_e^2(3 \cos^2 \theta_e - 1)} = \overline{3\zeta^2 - r_e^2}$$

(dove al solito $z \equiv \mathbf{I}$ è l'asse di simmetria del nucleo, e $\zeta \equiv \mathbf{J}$ è l'asse di simmetria della nube elettronica). Avendo presente la fig. 7, si può facilmente constatare che nel nostro modello atomico si ha:

$$(\bullet) \quad q_n = 2r_n^2, \quad q_e = 2r_e^2.$$

Sostituendo allora nella (35) i valori (\bullet) si ottiene l'espressione cercata:

$$(38) \quad \Delta W_q = -\frac{e^2 r_e^2 r_n^2}{2 r_e^5} (3 \cos^2 \theta - 1) = -e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5} \frac{1}{8} (3 \cos^2 (\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}) - 1).$$

Da questa si vede ancora come l'energia di quadrupolo nucleare sia nulla quando il nucleo possiede forma sferica ($q_n = 0$); ed inoltre come il valore di tale energia dipenda dal valore dell'angolo $\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}$ tra il momento meccanico del nucleo e degli elettroni (sarà dunque diverso il contributo di energia portato dal quadrupolo nucleare ai vari stati dell'atomo).

Per scrivere infine l'espressione definitiva di ΔW_q dobbiamo tener conto della quantizzazione dell'angolo $\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}$; infatti, come è noto, il $\cos(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}})$ può assumere solo i valori discreti:

$$\cos(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}) = \frac{K}{2IJ}$$

$$\cos^2(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}}) = \frac{K(K+1)}{I(2I-1) \cdot J(2J-1)}$$

$$[K = F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)].$$

Sostituendo pertanto nella (38) a $\cos^2(\widehat{\mathbf{IJ}})$ la sua espressione quantistica, si ha infine:

$$(39) \quad \Delta W_q = -e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5} \frac{\frac{3}{8} K(K+1) - \frac{1}{2} I(I+1) \cdot J(J+1)}{I(2I-1) \cdot J(2J-1)}.$$

È questa l'espressione che volevamo stabilire; notiamo ancora esplicitamente come il valore dell'energia ΔW_q sia diverso pei vari livelli energetici dell'atomo (ogni livello definito da una terna J, I, F di numeri quantici) ⁽⁶⁾.

9. — Spiegazione della struttura iperfina "anomala".

Abbiamo già visto come al progressivo approfondimento delle indagini nel campo degli spettri, sia corrisposto un analogo progredire delle conoscenze sulla struttura dell'atomo. Ricordiamo infatti che l'esistenza stessa di righe spettrali primarie diede origine al primo modello atomico in cui si attribuivano all'atomo livelli discreti, la cui energia:

$$W' = W_{np,e},$$

era dovuta semplicemente all'attrazione elettrostatica tra nucleo puntiforme (ossia sferico) ed elettroni; questa energia costituisce la maggior parte di quella complessiva spettante ad un livello qualsiasi. La risoluzione di ciascuna riga in più altre (struttura fina) portò ad attribuire ad ogni livello dell'atomo una energia:

$$W'' = W' + \Delta E_J = W_{np,e} + \Delta E_J,$$

somma dell'energia elettrostatica $W_{np,e}$ e della energia additiva magnetica ΔE_J , dovuta agli spin elettronici ($\Delta E_J \ll W_{np,e}$). La successiva scoperta della struttura iperfina si interpretò attribuendo ad ogni livello un'energia:

$$(40) \quad W''' = W'' + \Delta E_I = W_{np,e} + \Delta E_J + \Delta E_I,$$

somma dell'energia W'' e dell'energia additiva magnetica ΔE_I dovuta agli spin nucleari.

⁽⁶⁾ Dalla (38) o dalla (39) appare come — nel modello schematico usato — la energia ΔW_q sia nulla non solo quando è $q_n = 0$, ma anche quando, pur essendo $q_n \neq 0$, sia $q_e = 0$. Questo risultato non sorprende; basta infatti osservare che le posizioni di un nucleo — anche se di forma asferica ($q_n \neq 0$), posto in un campo elettrico (degli elettroni) avente simmetria sferica ($q_e = 0$), sono tutte energeticamente equivalenti (l'energia elettrostatica complessiva di interazione coulombiana non dipende, come è chiaro, dall'angolo $\widehat{\mathbf{IJ}}$).

Le cose erano a questo punto quando la scoperta della struttura iperfina « anomala » costrinse ad un riesame della questione; abbiamo infatti già spiegato come essa consista in uno spostamento, sempre molto piccolo, di ciascuna riga di struttura iperfina rispetto alla posizione prevista in base alla (40). (Non si tratta cioè di una ulteriore complessità nella natura di ogni riga di struttura iperfina, ma di una variazione della sua posizione nel multipletto).

La spiegazione, come ora mostreremo in dettaglio, venne con l'ipotesi e la teoria dei quadrupoli elettrici nucleari, trattata in precedenza.

Si è visto infatti che supponendo in generale il nucleo atomico di forma asferica la energia elettrostatica complessiva dell'atomo risulta:

$$W_{n,e} = W_{np,e} + \Delta W_a = W' + \Delta W_a.$$

Pertanto l'energia totale di un livello sarà:

$$(41) \quad W_{tot} = W''' + \Delta W_a = W_{np,e} + \Delta E_J + \Delta E_I + \Delta W_a,$$

somma dell'energia W''' e dell'energia addittiva elettrostatica ΔW_a dovuta al momento di quadrupolo nucleare ($\Delta W_a \ll \Delta E_I \ll \Delta E_J \ll W_{np,e}$).

È chiaro quindi che in un multipletto di struttura iperfina la separazione tra le varie componenti non dipende più solamente dai valori della energia magnetica:

$$(42) \quad \Delta E_I = AIJ \cos(\widehat{\mathbf{IJ}})$$

(l'energia $W_{np,e} + \Delta E_J$ è comune a tutte le componenti del multipletto), ma anche dai valori dell'energia ΔW_a .

Precisamente (tenendo presente che nell'espressione di ΔW_a :

$$\Delta W_a = -e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5} \frac{1}{8} (3 \cos^2(\widehat{\mathbf{IJ}}) - 1) = -\frac{3}{8} e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5} \cos^2(\widehat{\mathbf{IJ}}) + \frac{1}{8} e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5}$$

il termine $1/8 e [q_e q_n / r_e^5]$ è indipendente dall'angolo $\widehat{\mathbf{IJ}}$, ossia è uguale per tutti i termini di un multipletto di struttura iperfina, e può quindi conglomerarsi nell'energia $W_{np,e} + \Delta E_J$ la legge di separazione (42) deve essere sostituita dalla nuova:

$$(43) \quad \Delta W_F = AIJ \cos(\widehat{\mathbf{IJ}}) + C \cdot \cos^2(\widehat{\mathbf{IJ}}),$$

avendo posto:

$$(44) \quad C = -\frac{3}{8} e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5}.$$

La (43) esprime la *vera legge di separazione della struttura iperfina* (7): data una riga di struttura fina, i valori di ΔW_F fissano le posizioni delle righe del multipletto di struttura iperfina, che ne deriva.

La legge di separazione (43) tenendo conto della quantizzazione dell'angolo $\widehat{\mathbf{IJ}}$ si scrive nella sua forma definitiva

$$(43') \quad \Delta W_F = \frac{A}{2} K + B \cdot K(K+1),$$

avendo posto:

$$(45) \quad B = -\frac{3}{8} \cdot e^2 \frac{q_e q_n}{r_e^5} \frac{1}{I(2I-1)J(2J-1)}.$$

Vediamo ora come la (43) o la (43') — dedotte, ricordiamolo, mediante l'ipotesi dei quadrupoli nucleari — ci renda pienamente conto di tutte le particolarità delle strutture iperfine « anomale » degli spettri.

1) Anzitutto, poichè il valore del rapporto A/C risulta sperimentalmente $\approx \sim 100$, si ha dalle (43) [essendo evidentemente $\cos^2(\widehat{\mathbf{IJ}}) \leq \cos(\widehat{\mathbf{IJ}})]$ che il primo termine di cui è composta l'energia ΔW_F risulta \gg del secondo termine, cioè $A I J \cos(\widehat{\mathbf{IJ}}) \gg C \cdot \cos^2(\widehat{\mathbf{IJ}})$ e $(A/2)K \gg B \cdot K(K+1)$; vale a dire: l'energia complessiva ΔW_F è in gran parte di origine magnetica.

Spettroscopicamente ciò significa che la posizione di una riga di struttura iperfina è fissata principalmente dal termine magnetico di ΔW_F ; l'energia elettrostatica di quadrupolo — quando esiste — non fa che *spostare di poco* la riga dalla posizione che occuperebbe in base al solo termine magnetico. Per quel che s'è detto l'entità di tale spostamento è minima ($\Delta W_q \ll \Delta E_I \ll \ll \Delta E_J$); e ciò spiega come l'osservazione della struttura iperfina « anomala » sia giunta ultima tra le scoperte spettroscopiche, ed anche l'incertezza sui valori sperimentali dei momenti di quadrupolo elettrico dei nuclei.

2) Lo spostamento subito a causa dell'energia addittiva di quadrupolo è diverso pei vari termini di uno stesso multipletto. Ciò risulta subito dal fatto (già notato precedentemente) che tale energia dipende dal valore dell'angolo $\widehat{\mathbf{IJ}}$ ossia dal valore di F : cioè appunto dal particolare livello di struttura iperfina.

3) Lo spostamento di un livello di struttura iperfina a causa dell'energia addittiva di quadrupolo può avvenire sia verso l'« alto » che verso il « basso »

(7) Risulta da tutto ciò come sia impropria la denominazione di struttura iperfina « anomala » e « normale », essendo in realtà la seconda niente altro che un caso particolare ($\Delta W_q = 0$) della prima, cui pertanto dovrebbe spettare il solo e semplice nome di « struttura iperfina ».

rispetto alla posizione che occuperebbe in base al solo termine magnetico di ΔW_F ⁽⁸⁾.

Infatti il termine elettrostatico delle (43) può avere segno positivo o negativo; precisamente (essendo $\cos^2(\widehat{\mathbf{I}\mathbf{J}})$, e $K(K+1)$ evidentemente sempre po-

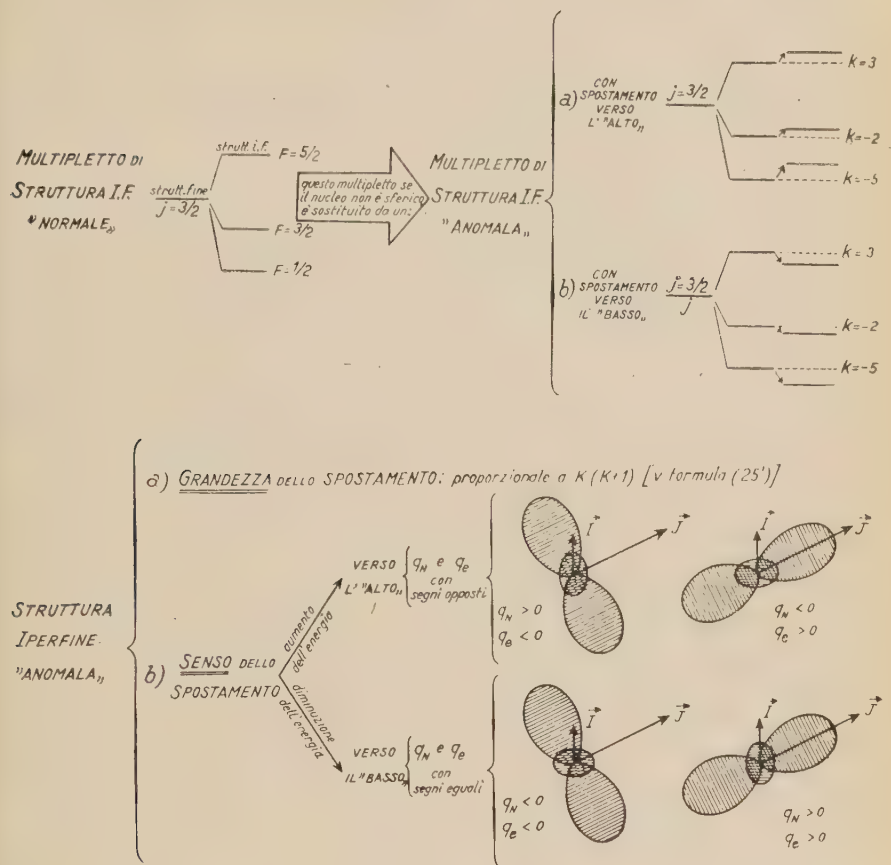


Fig. 8.

sitivi) tale termine è positivo o negativo secondo che sono positivi o negativi i fattori C e B .

Anzi, tenendo conto delle espressioni (44), (45) di questi fattori si vede che

⁽⁸⁾ Ricordiamo che negli schemi spettroscopici, uno spostamento verso l'«alto» o verso il «basso» corrisponde rispettivamente ad aumento o diminuzione dell'energia. Infatti l'energia complessiva di uno stato qualsiasi dell'atomo è sempre negativa (tale essendo il termine preponderante $W_{np,e}$); quindi i livelli sono tutti disposti sotto il livello zero (corrispondente al limite di ionizzazione), con energie decrescenti (in senso algebrico) mano mano che si procede verso il «basso».

essi sono positivi se i momenti di quadrupolo elettrico q_n e q_e hanno segni opposti, negativi se hanno segni uguali. Possiamo quindi concludere che:

a) lo spostamento avviene verso l'« alto » se q_n e q_e hanno segni opposti;

b) lo spostamento avviene verso il « basso » se q_n e q_e hanno segni uguali.

4) Lo spostamento ha lo stesso senso (verso l'« alto » o verso il « basso ») per tutti i termini di uno stesso multipletto di struttura iperfina. Infatti il senso dello spostamento dipende solo dai fattori C e B e questi — come appare dalle (44), (45) — sono costanti per tutti i termini di un dato multipletto. (Invece il valore assoluto dello spostamento varia, come s'è detto, da termine a termine di uno stesso multipletto).

5) Lo spostamento è nullo (ossia non si osserva struttura iperfina « anomala ») quando il momento di quadrupolo elettrico del nucleo o della nube elettronica o di entrambi sono $= 0$. Infatti in tal caso, in base alle espressioni di C e B , vediamo che il termine elettrostatico delle (43) scompare.

Tutte queste previsioni della teoria hanno trovato piena conferma nell'esperienza; la struttura iperfina « anomala » costituisce quindi una convincente prova indiretta dell'esistenza nei nuclei di momento di quadrupolo elettrico, ed anzi fornisce, come vedremo, uno dei metodi più usati per la determinazione dei momenti stessi.

Nel quadro di pagina precedente sintetizziamo graficamente la discussione prima fatta sulle strutture iperfine « anomale »; gli schemi mostrano chiaramente la dipendenza della grandezza dello spostamento della posizione del livello nel multipletto, e la dipendenza del *senso* dello spostamento dai momenti di quadrupolo elettrico dell'atomo (e si è anzi rappresentato a fianco il modello atomico corrispondente).

Si è poi supposto, per esemplificare, il nucleo con $I = 1$, ed un elettrone p con $j = 3/2$.

NOTA. — Risolvendo la (45) rispetto a q_n si ottiene:

$$(46) \quad q_n = -\frac{8}{3} \frac{B}{e^2 q_e / r_e^5} \cdot I(2I-1)J(2J-1) .$$

Da questa risulta come il momento di quadrupolo q_n sia proporzionale, mediante il fattore $I(2I-1)$, al valore del suo spin, e come, in particolare, sia nullo quando $I = 0$ oppure $I = 1/2$.

Questa previsione della teoria, che cioè i nuclei il cui spin è 0 od $1/2$ devono avere momento di quadrupolo nullo, è stata finora pienamente confermata dall'esperienza.

METODI PER LA DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI MOMENTI DI QUADRUPOLO NUCLEARE

10. - Esame della struttura iperfina "anomala" (spettroscopia ottica).

L'esame della struttura iperfina degli spettri costituisce il metodo originario diretto alla determinazione numerica dei momenti di quadrupolo nucleare. E infatti, come abbiamo visto, è nella struttura iperfina degli spettri che originariamente si rivelò l'esistenza di momenti di quadrupolo nei nuclei, attraverso quelle deviazioni dalla legge di separazione che abbiamo chiamato struttura iperfina « anomala », e la cui teoria abbiamo svolto nei numeri precedenti. In base a questa teoria, la determinazione del momento q_n di un nucleo è, concettualmente, molto semplice. Riprendiamo infatti la formula (46) che scriviamo [essendo $q_e = r_e^2(3 \cos^2 \theta_e - 1)$]:

$$(46) \quad q_n = - \frac{8 \cdot I(2I - 1) \cdot J(2J - 1)}{3e^2 \frac{3 \cos^2 \theta_e - 1}{r_e^3}} \cdot B.$$

Questa ci fornisce il valore di q_n ove siano note le quantità a 2° membro per l'atomo in esame; il valor medio che compare al denominatore si calcola, al solito, in base alle autofunzioni elettroniche; i valori F , I e J si determinano nel modo usuale, mentre il fattore B si determina nel modo seguente.

Si abbia un multipletto di struttura iperfina « anomala »; si è visto che un livello del multipletto è definito dall'energia addittiva:

$$\Delta W_F = \frac{A}{2} K + B \cdot K(K + 1),$$

[dove $K = F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)$] che fissa la sua posizione rispetto al baricentro del multipletto.

Misurando allora le separazioni tra tre componenti del multipletto, si ottiene dalla (47) il sistema:

$$\Delta W_{F_1} - \Delta W_{F_2} = \frac{A}{2} (K_1 - K_2) + B \{ K_1(K_1 + 1) - K_2(K_2 + 1) \},$$

$$\Delta W_{F_2} - \Delta W_{F_3} = \frac{A}{2} (K_2 - K_3) + B \{ K_2(K_2 + 1) - K_3(K_3 + 1) \},$$

in cui le sole incognite sono A e B . Si ricava in tal modo il valore del fattore B relativo al nucleo in esame, e quindi dalla (47) il momento di quadrupolo q_n cercato. (Il segno di q_n dipende essenzialmente dal segno di B , segno che è determinato — come si è già visto — dal senso (verso l'«alto» o verso il «basso») in cui avviene lo spostamento delle righe del multipletto iperfine «anomalo».

Come ben si comprende, data l'esiguità dei valori da determinare, si richiedono misure di estrema precisione ed apparecchi di alto potere risolutivo; si è perciò venuto affermando nella ricerca dei momenti di quadrupolo nucleare l'impiego di spettroscopi a microonde, in luogo dell'usato spettroscopio ottico.

11. — Impiego della spettroscopia a microonde.

La spettroscopia a microonde (o, meglio, a radioonde centimetriche) è direttamente connessa con lo sviluppo assunto di recente dalla tecnica delle onde a fascio (apparecchi Radar), di cui si può considerare una ingegnosa applicazione scientifica. La descrizione degli apparecchi e del loro funzionamento esce dal quadro di questa rassegna ⁽⁹⁾; ci basterà qui dire che rispetto a quello ottico, lo spettroscopio a microonde presenta una sostanziale diversità: la mancanza di un qualsiasi strumento ottico di dispersione (prisma o reticolo); innovazione fondamentale questa, come ben si comprende, essendo il sistema dispersivo il cuore stesso dello spettroscopio ottico, e ciò che in sostanza ne fissa i limiti e le possibilità. Circa le caratteristiche del nuovo spettroscopio, basti dire che il potere risolutivo risulta nei tipi più recenti oltre 100 000 volte quello dei migliori spettroscopi ottici (per la regione dell'infrarosso); il suo impiego è perciò particolarmente utile nello studio delle strutture iperfine degli spettri molecolari.

Per quel che riguarda in particolare la determinazione dei momenti di quadrupolo nucleare dagli spettri molecolari, occorre evidentemente calcolare (come si è già fatto nel caso di un atomo) l'energia addittiva di quadrupolo per un livello qualsiasi della molecola; per una molecola simmetrica questa energia risulta data da ⁽¹⁰⁾:

$$(48) \quad \Delta W_a = -eq_n \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot \left(1 - \frac{3C}{J(J+1)}\right) \cdot \frac{\frac{3}{8} K(K+1) - \frac{1}{2} I(I+1) J(J+1)}{I(2I-1)(2J-1)(2J+3)},$$

⁽⁹⁾ Per un articolo organico sull'argomento vedasi, ad es., il n. 5 della bibliografia.

⁽¹⁰⁾ V. bibliografia [4], [6], [7].

dove:

I = spin del nucleo;

z = asse di simmetria della molecola;

$K = F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)$;

J = spin della molecola;

C = proiezione di J sull'asse z ;

V = potenziale elettrostatico molecolare nella posizione occupata dal nucleo.

Misurate sperimentalmente nel solito modo (dalle separazioni e intensità delle righe iperfine) le varie grandezze, dalla (48) si ottiene il valore numerico del fattore (« quadrupole coupling »):

$$(49) \quad -eq_n \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

da cui si ricava il momento q_n di quadrupolo del nucleo, ove però si sia calcolato il potenziale interno V della molecola.

12. - Col metodo della risonanza magnetica.

Questo metodo è servito sinora a determinare il momento di quadrupolo di un solo nucleo, il deutone; ed anzi la scoperta di tale momento è venuta quasi incidentalmente, essendo il metodo della risonanza magnetica propriamente ideato per determinare i momenti magnetici dei nuclei. Il metodo consiste notoriamente nell'analizzare raggi atomici o molecolari mediante un campo magnetico trasversale oscillante a radiofrequenza; allorchè la frequenza di detto campo e quella (di LARMOR):

$$(50) \quad \nu_L = \frac{\mu_I H}{hI},$$

con cui precedono i momenti magnetici dei nuclei del raggio, sono uguali, si verifica un fenomeno di risonanza rivelabile al detector (si ha un minimo dell'intensità del raggio di particelle). Determinata in tal modo la frequenza ν_L , e noto lo spin I per altra via, si può dalla (50) stabilire il momento magnetico nucleare μ_I .

Orbene RABI e collaboratori ⁽¹¹⁾ analizzando col metodo della risonanza fasci molecolari di ortoidrogeno e di deuterio ottennero quanto segue:

1) Molecola H_2 : si osservano 6 minimi di risonanza; l'interpretazione

(¹¹) V. bibliografia [8],

teorica — che tenga conto di tutte le interazioni magnetiche spin-spin e spin-orbita nella molecola — porta a stabilire l'esistenza di 9 livelli quantizzati di rotazione nella molecola. Il numero e la posizione dei minimi osservati sono in perfetto accordo con quelli così calcolati.

2) Molecola D_2 : si hanno ancora 6 minimi di risonanza, corrispondenti a 9 livelli della molecola; però l'analisi dei risultati che riusciva perfettamente nel caso dell'ortoidrogeno, cade ora in difetto: le posizioni dei 6 minimi calcolate tenendo conto di tutte le interazioni magnetiche, come nel caso del H_2 , si scostano sensibilmente da quelle osservate; si deve ammettere che ciascuno dei 9 livelli della molecola D_2 possieda un'energia maggiore di quella calcolata; per quel che s'è detto l'energia addittiva osservata non può essere di natura magnetica.

Questo risultato sorprendente si può interpretare ammettendo l'esistenza di un momento di quadrupolo elettrico nel deutone: l'energia addittiva osservata è quella elettrostatica di interazione dei momenti di quadrupolo dei due nuclei 2D della molecola tra loro e col gradiente del campo elettrico molecolare. Dai risultati sperimentali si può allora, ovviamente, risalire al valore numerico del momento di quadrupolo elettrico del deutone.

RISULTATI SPERIMENTALI

Coi metodi che abbiamo sopra brevemente esposti, si sono determinati i momenti di quadrupolo elettrico di un buon numero di nuclei; ed altri è prevedibile vengano in avvenire determinati grazie soprattutto alla spettroscopia a microonde, cui già si devono recentemente numerose determinazioni.

Nella tabella che segue sono raccolti i momenti di quadrupolo nucleare sinora determinati ⁽¹²⁾.

⁽¹²⁾ I valori riportati nella tabella sono quelli elencati, con la relativa bibliografia, da H. H. GOLDSCHMIDT e D. R. INGLIS (*Brookhaven National Laboratory Report BNL R*, 1, 5 (ottobre 1948)); cui si aggiungono i momenti del 6Li e 7Li determinati da P. KUSCH (*Phys. Rev.*, **75**, 887 (1949)), del ${}^{10}B$ e ${}^{11}B$ determinati da GORDY, RING e BURG (preannunciato su *Phys. Rev.*, **76**, 139 (1949)), del ${}^{129}I$ determinato da R. LIVINGSTON, O. R. GILLIAM, W. GORDY (*Phys. Rev.*, **76**, 149 (1949)) e del ${}^{115}In$ dato da B. T. FELD (*Nuclear Science Series, National Research Council, Preliminary Report*, n. 2 (Settembre 1948)).

TABELLA I. — *Momenti di quadrupolo elettrico nucleare sinora determinati.*

NUCLEO	Numero di protoni	Numero di neutroni	Momento di quadrupolo ($\times 10^{-24}$ cm ²)
² H	1	1	+ 0,0027
⁶ Li	3	3	~ 0
⁷ Li	3	4	— 0,020
¹⁰ B	5	5	+ 0,060
¹¹ B	5	6	+ 0,030
¹⁴ N	7	7	+ 0,020
²⁷ Al	13	14	+ 0,156
³³ S	16	17	— 0,050
³⁵ Cl	17	18	— 0,079
³⁷ Cl	17	20	— 0,062
⁶³ Cu	29	34	— 0,10
⁶⁵ Cu	29	36	— 0,10
⁶⁹ Ga	31	38	+ 0,232
⁷¹ Ga	31	40	+ 0,147
⁷⁵ As	33	42	+ 0,300
⁷⁹ Br	35	44	+ 0,280
⁸¹ Br	35	46	+ 0,230
⁸³ Kr	36	47	+ 0,150
¹¹⁵ In	49	66	+ 1,17
¹²⁷ I	53	74	— 0,60
¹²⁹ I	53	76	— 0,43
¹³¹ Xe	54	77	~ 0
¹³³ Cs	55	78	$\leq 0,3$
¹⁵¹ Eu	63	88	+ 1,20
¹⁵³ Eu	63	90	+ 2,50
¹⁷³ Yb	70	103	+ 3,9
¹⁷⁵ Cp	71	104	+ 5,9
¹⁷⁶ Cp	71	105	+ 7
¹⁸¹ Ta	73	108	+ 6,0
¹⁸⁵ Re	75	110	+ 2,8
¹⁸⁷ Re	75	112	+ 2,6
²⁰¹ Hg	80	121	+ 0,50
²⁰⁹ Pb	83	126	— 0,40

Questi risultati, benchè incompleti, hanno già dato luogo a importanti deduzioni e considerazioni di cui ora diremo brevemente; ed ulteriori contributi alle nostre conoscenze sulla struttura del nucleo è lecito attendersi dallo studio dei momenti di quadrupolo, essendo chiaro che la forma esterna di un nucleo, descritta e misurata dal suo momento q , rispecchia di esso l'intima costituzione.

13. — Il momento di quadrupolo del deutone e la natura non centrale delle forze nucleari.

Il deutone, ossia il nucleo del deuterio, è notoriamente il meno complesso dei nuclei, essendo costituito da un protone ed un neutrone; ed è pertanto l'unico di cui si possa oggi tentare una teoria matematica (secondo i metodi usuali della meccanica quantistica). Ma, a parte ciò, il problema del deutone riveste per la fisica nucleare carattere ed interesse del tutto generali; esso equivale infatti a stabilire l'interazione protone-neutrone, ossia non è altro che un caso fondamentale, e dei più interessanti ed atti ad essere studiati, di forza nucleare.

Orbene, in tutta la questione occupa un ruolo veramente determinante quel momento di quadrupolo elettrico che, come abbiamo già visto, si deve ammettere esista nel deutone.

Il problema del deutone si impernia, al solito, sulla discussione della sua equazione ondulatoria; si tratta in particolare di studiare lo stato fondamentale del sistema. Noi tralasciamo qui lo svolgimento effettivo dei calcoli, e ci limitiamo a riassumerne i risultati ⁽¹³⁾.

Nell'ipotesi, a prima vista naturale, di forze nucleari a carattere centrale, la discussione dell'equazione di SCHRÖDINGER del deutone porta, tra l'altro, a concludere che lo stato fondamentale del nucleo deve essere uno stato S (di tripletti), cioè simmetricamente sferico ($q = 0$). Questa conclusione, ammissibile in un primo tempo, si rivelò inaccettabile in seguito alla scoperta sperimentale del momento di quadrupolo elettrico del deutone.

L'origine di queste difficoltà teoriche è stata trovata da SCHWINGER nella natura stessa delle forze nucleari; precisamente si può mettere in dubbio il carattere centrale di tali forze. Questa ipotesi — suggerita dall'interazione di due dipoli magnetici, che ha appunto, notoriamente, carattere non centrale — appare in fondo una naturale generalizzazione dell'interazione spin-spin tra protone e neutrone.

In questo ordine di idee SCHWINGER ha proposto di introdurre nell'hamiltoniana del deutone un termine non centrale, contenente a fattore l'operatore:

$$(51) \quad \zeta_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2,$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\boldsymbol{\sigma}_2$ sono gli operatori rappresentanti gli spin delle due particelle ed r la loro distanza mutua.

⁽¹³⁾ Sul problema del deutone vedansi i nn. [9], [10], [11], [12], [13] della bibliografia.

L'introduzione di un termine non centrale nell'espressione dell'energia di interazione tra protone e neutrone porta come conseguenza essenziale che lo stato fondamentale del sistema non è più uno stato 3S_1 puro, ma risulta una miscela di stati semplici diversi. Precisamente si trova che lo stato fondamentale del deutone deve essere una miscela di ${}^3S_1 + {}^3D_1$; ma è proprio da questo risultato che viene la spiegazione del momento di quadrupolo elettrico del deutone: la presenza, accanto all'onda 3S_1 , simmetricamente sferica ($q = 0$), di un'onda 3D_1 , dà luogo alla deviazione della carica del deutone dalla simmetria sferica, richiesta dall'esperienza. Dato il piccolo valore del momento q_D , lo stato fondamentale del deutone deve ritenersi formato in gran parte dall'onda 3S_1 .

NOTA. — Occorre avvertire che l'ipotesi di forze non centrali del tipo (51), se spiega il momento di quadrupolo, non risolve tuttavia completamente il problema del deutone. Invero il rapporto $(\mu_P + \mu_N - \mu_D)/\mu_N$ (dove μ_P , μ_N e μ_D sono rispettivamente i momenti magnetici del protone, del neutrone e del deutone) calcolato nell'ipotesi di forze non centrali con la teoria classica di RARITA e SCHWINGER, risulta $= 0,022$, e cioè sembrerebbe in accordo molto soddisfacente con le più recenti e precise determinazioni sperimentali ⁽¹⁴⁾. Tuttavia questa concordanza è largamente casuale; ciò risulta dalla circostanza, messa in luce da CALDIROLA ⁽¹⁵⁾, che il valore della correzione relativistica del momento magnetico del deutone è di grandezza comparabile a quella derivante dalla presenza di un'autofunzione 3D_1 nello stato fondamentale. Questa posizione è poi stata ulteriormente aggravata dalle successive osservazioni ⁽¹⁶⁾ sul calcolo della correzione relativistica, le quali hanno anzi introdotto nuovi elementi di incertezza per tutto il problema, mostrando come il valore di detta correzione fra l'altro dipenda, in modo sensibile, dal carattere del campo di forze rispetto ad una trasformazione di LORENTZ. La questione del deutone è quindi tuttora aperta.

14. — Relazione tra momento di quadrupolo e momento magnetico del nucleo.

La ricerca — anche solamente empirica — delle relazioni tra le varie grandezze caratteristiche dei nuclei, è certo premessa essenziale per una organica teoria nucleare; un tentativo parziale, cui ora accenneremo, è quello fatto recentemente da GORDY ⁽¹⁷⁾, che conduce anche alla previsione empirica di nuovi momenti di quadrupolo.

L'osservazione di GORDY è questa: Nella Tabella I dei momenti q sinora determinati esistono sei coppie di isotopi *aventi lo stesso spin* (${}^{35}\text{Cl}$ e ${}^{37}\text{Cl}$; ${}^{63}\text{Cu}$ e ${}^{65}\text{Cu}$; ${}^{69}\text{Ga}$ e ${}^{71}\text{Ga}$; ${}^{79}\text{Br}$ e ${}^{81}\text{Br}$; ${}^{151}\text{Eu}$ e ${}^{153}\text{Eu}$; ${}^{185}\text{Re}$ e ${}^{187}\text{Re}$); in ciascuna

⁽¹⁴⁾ $0,02230 \pm 0,00009$; F. BLOCH D. NICODEMUS e H. H. STAUB: *Phys. Rev.*, **79**, 1025 (1948).

⁽¹⁵⁾ V. bibliografia [14].

⁽¹⁶⁾ V. bibliografia [15]-[18].

⁽¹⁷⁾ V. bibliografia [19].

coppia poi l'isotopo avente il momento q più grande (in valore algebrico) possiede il momento magnetico più piccolo. Orbene, facendo i rapporti q_1/q_2 e μ_1/μ_2 (dove l'indice 1 si riferisce all'isotopo più leggero di ciascuna coppia) e moltiplicando q_1/q_2 per il rispettivo μ_1/μ_2 o μ_2/μ_1 , a seconda che il segno comune di q_1 e q_2 è positivo o negativo, si ottiene il risultato singolare che tale prodotto è, con ottima approssimazione, *lo stesso per tutte le coppie di isotopi*; precisamente (v. Tabella II) si ottiene in media 1,12:

$$(52) \quad \begin{cases} (q_1/q_2) \times (\mu_1/\mu_2) = 1,12 \text{ (segno } +) \\ (q_1/q_2) \times (\mu_2/\mu_1) = 1,12 \text{ (segno } -) \end{cases}$$

È quindi lecito pensare valido questo risultato anche per ogni altra coppia di isotopi *aventi lo stesso spin*; e ciò suggerisce l'idea di prevedere nuovi momenti di quadrupolo non ancora determinati sperimentalmente. Infatti se abbiamo due isotopi aventi lo stesso spin, e si conoscano i momenti magnetici di entrambi ed il momento di quadrupolo di uno di essi, la prima o la seconda delle (52) permette di ricavare immediatamente il momento di quadrupolo dell'altro isotopo.

TABELLA II. — *Relazione tra momento di quadrupolo e momento magnetico.*

X_1/X_2	μ_1/μ_2	q_1/q_2	Segno di q	$(q_1/q_2)(\mu_1/\mu_2)$ oppure $(q_1/q_2)(\mu_2/\mu_1)$
$^{35}\text{Cl} / ^{37}\text{Cl}$	1,20	1,28	—	1,07
$^{63}\text{Cu} / ^{65}\text{Cu}$	0,94	1	—	1,12
$^{69}\text{Ga} / ^{71}\text{Ga}$	0,79	1,58	+	1,24
$^{79}\text{Br} / ^{81}\text{Br}$	0,93	1,20	+	1,12
$^{151}\text{Eu} / ^{153}\text{Eu}$	2,24	0,48	+	1,08
$^{185}\text{Re} / ^{187}\text{Re}$	0,99	1,08	+	1,07
				media:
				1,12

In base alle idee sopra esposte si possono prevedere il momento di quadrupolo del ^{113}In in base al valore noto di quello dell'isotopo ^{115}In ; ed il momento di quadrupolo del ^{137}Cs mediante il ^{155}Cs .

Correttamente o non, la stessa relazione (52) si può applicare a coppie di nuclei, che, pur avendo numero atomico diverso, hanno un numero di particelle molto prossimo, e, naturalmente, spin uguali. In questo modo si può prevedere il valore del momento di quadrupolo dei nuclei ^{39}K e ^{41}K mediante il valore noto del ^{37}Cl ; e parimenti il momento di quadrupolo del ^{87}Rb , da

capax

PRODUZIONI ELETTROTECNICHE S. A. R. L.

Stabilimento: CASALECCHIO DI RENO - **BOLOGNA** - VIA CANONICA 2 - TEL. 52186

**Condensatori elettrolitici a carta, a mica
e prodotti speciali**

Direzione: **MILANO** - VIA PORPORA 126 - TELEF. 280.032



**INDUSTRIA
MILANESE
TERMOMETRI**

Dott. LOCCI

MILANO - VIA LAMBRO 4 - Tel. 200.903

TERMOMETRI per chimica
TERMOMETRI di precisione e controllo
div. 1/10; 1/20; 1/50; 1/100 °C.
TERMOMETRI N. O. M. per Oli
Minerali.

TERMOMETRI per Crioscopia
» » *Calorimetria*
» » *Ebullioscopia*
» » *Ipsometria*
» » *Meteorologia*

CRIOSCOPIO di Winter

MANOMETRI ad aria libera

VACUOMETRI

CLINOMETRI a bolla d'aria

PSICROMETRI tipo August

BAROMETRI a mercurio

V. ALBERTONI & C.

Casa Fondata nel 1845

**BILANCE DI PRECISIONE
E APPARECCHI SCIENTIFICI**

Stabilimento a **CANOBIO** (Lago Maggiore)

**Off. Vendite - Offic. Riparazioni e Verifiche
MILANO**

Corso Vercelli 30 Telefono N. 42-622

FABBRICAZIONE PROPRIA:

Bilance per analisi
» *tecniche da laboratorio*
» *per metalli ricchi*
» *per pietre preziose*
» *per assaggio oro*

*Apparecchi elettrici per condizionatura e
incenerimento di qualsiasi materia*

*Bilance per peso specifico - per liquidi -
cereali - creme*

Forni a muffola

*Bilance gelatinometriche - bascule e pesi
per ogni industria*

*Istrumenti per titolazione: seta - cotone
carta - cartoni*

Dompe a Vuoto, a pistoncini a cassetto cilindrico

Portate sino a 500 m³·ora - Vuoti sino a 0,05 mm Hg.

Dompe a Vuoto, in bagno d'olio tipo «Pfeiffer»

Portate sino a 10 m³·ora - Vuoti sino a 0,004 mm Hg.

S.I.C.M.I.

Corso Venezia 35 - MILANO - Tel. 792.593 - 793.228

F. I. V. R. E.

Fabbrica Italiana Valvole Radio Elettriche

Sede: **MILANO** - Via Degli Amedei n. 8 - Telef. 16030 - 86025

Indirizzo Telegrafico: **CATODO**

STABILIMENTI { **PAVIA** - Via Fabio Filzi n. 1
 { **FIRENZE** (Castello) - Via Panciatichi n. 70

- Valvole termojoniche trasmettenti e riceventi di ogni tipo e potenza e per ogni uso.
- Tubi a raggi catodici.
- Tubi a raggi X.
- Cellule fotoelettriche.



 OFFICINE
GALILEO

MICROSCOPI
a contrasto di fase

INDUSTRIA NAZIONALE TERMOMETRI

MILANO - VIA VOLTA 10 - TELEF. 6.66.49

- **TERMOMETRI** da laboratorio e tecnici comuni e di precisione a scala esterna incisa a scala interna in vetro bianco diritti ed a squadra a gambo lungo e lunghissimo
- **TERMOMETRI** per alte e per basse temperature
- **TERMOMETRI** a serie di tre e di sette
- **TERMOMETRI** speciali e a disegno
- **PSICROMETRI**

S. A. F. I.

SOCIETÀ PER AZIONI FILI ISOLATI

Sede Amm.: Piazza 4 Novembre 6 - MILANO - Tel. 694.841/4
Deposito di MILANO - Via Solferino, 22 A

Fili di rame smaltato (da 0,04 a 3,50 mm. di diam.) nelle qualità: «**Normale**» per avvolgimenti - «**Magneto**» per costruzione di magneti - «**Duroflex**» per tutti gli impieghi in cui è richiesta una forte resistenza meccanica dello smalto e particolarmente in sostituzione del conduttore smaltato rivestito con una spirale di filato.

Piattina di rame smaltata.

Fili e piattine di rame ricoperti con seta, cotone, carta, amianto, vetro.

Cordicelle tipo Litz in rame smaltato con 1 o 2 coperture seta.

Tubetti isolanti flessibili in «**Sofflex**» per tutte le applicazioni - **Tubi rigidi** in «**Sofflex**» in sostituzione dei tubi Bergmann.

Cavetti e cordicelle di rame isolato in «**Sofflex**» per impianti elettrici; per installazioni forza elettromotrice, riscaldamento, luce; per connessioni di quadri ed apparecchiature elettriche, ecc.

I S O L A

SOCIETÀ PER AZIONI

per la **FABBRICAZIONE DI ISOLANTI ELETTRICI**

Sede Amm.: Piazza 4 Novembre 6 - MILANO - Tel. 694.841/4
Deposito di MILANO - Via Solferino, 22 A

Prodotti micati: Amberiti - Micaniti - Pezzi sagomati - Nastri micati con supporti di carta, tela e seta, plastici ed al compound.

Prodotti alla bachelite: Dellite e Radiolite (carta bachelizzata color naturale e nera) in lastre, tubi, cilindri, bastoni, pezzi lavorati, ecc. - Canevasite (tela bachelizzata) - Asbestite.

Prodotti oleati: Carta, tela, seta sterlinata in rotoli e in nastri - Tisolite (isolamento speciale per cave motori) - Isocap e Mocap (carta chimica per tappi ed involucri).

Prodotti vari: Carta alla Gommalacca - Compounds - Calisite (amianto al silicato in lastre e tubi) - Resine.

Vernici isolanti «Isola»: per impregnazione (essicanti al forno); per finitura (essicanti all'aria); alla Dellite e alla Radiolite; per lamierini magnetici e per qualsiasi esigenza (alla gommalacca ecc.) Elettrosmalti.

^{81}Br , quello del ^{121}Sb dal ^{127}I e quello del ^{139}La dal ^{137}Cs . I valori previsti sono qui sotto elencati.:

$$\begin{aligned}^{113}\text{In} : \quad q &= \sim + 1,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{137}\text{Cs} : \quad q &= \sim + 0,2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{39}\text{K} : \quad q &= \sim - 0,03 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{41}\text{K} : \quad q &= \sim - 0,02 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{87}\text{Rb} : \quad q &= \sim + 0,17 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{121}\text{Sb} : \quad q &= \sim - 0,9 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{139}\text{La} : \quad q &= \sim + 0,2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

I momenti di quadrupolo stimati da GORDY sembrano in accordo ⁽¹⁸⁾ con regole empiriche più generali, che legano il momento magnetico allo spin ed al numero atomico, oltre che al momento q . Si ha infatti che il momento magnetico in generale, oltre a decrescere al crescere del valore algebrico di q , cresce al crescere di Z , e decresce insieme allo spin.

In base a ciò è possibile fare queste altre previsioni ⁽¹⁸⁾ ⁽¹⁹⁾:

$$\begin{aligned}^{67}\text{Zn} : \quad q &= \sim 0 \text{ cm}^2 \\^{59}\text{Co} : \quad q &> \text{ del } q \text{ del } ^{55}\text{Mn} \\^{85}\text{Rb} : \quad q &= \sim + 0,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \\^{123}\text{Sb} : \quad q &= \sim - 0,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

15. - Periodicità del momento di quadrupolo in funzione del numero di protoni e di neutroni del nucleo.

Per mettere in luce una eventuale dipendenza del momento q dal numero Z dei protoni ed N dei neutroni del nucleo, è conveniente ricorrere ad una rappresentazione grafica, come nelle figg. 9 e 10, che rappresentano rispettivamente le funzioni $q = q(Z)$ e $|q| = |q(N)|$. (Le curve sono tracciate anche in base ai momenti previsti nel numero precedente, che però non sono indicati sui grafici; inoltre essendo l'ordine di grandezza dei momenti di quadrupolo crescente con Z ed N , si sono adottate scale successivamente diverse per le ordinate). La rappresentazione grafica suddetta ci rivela *un fatto importante* che sfuggirebbe ad un semplice esame della Tabella I dei momenti: *risulta infatti da entrambi i grafici una marcata periodicità del valore di q sia in funzione di Z che di N . Non solo, ma gli intervalli di oscillazione, compresi fra i*

⁽¹⁸⁾ V. bibliografia [20].

⁽¹⁹⁾ La regola empirica di GORDY è stata recentemente criticata da TOWNES, FOLEY e Low che ne hanno messo in dubbio la pretesa conferma sperimentale (v. bibliografia [26]).

punti di ascissa Z e $N = 2, 8, 20, 50, 82, 126$, sono caratteristici per le strutture nucleari; infatti i suddetti valori di Z o N si sono rivelati di recente quali « numeri magici » per altre importanti proprietà dei nuclei ⁽²⁰⁾.

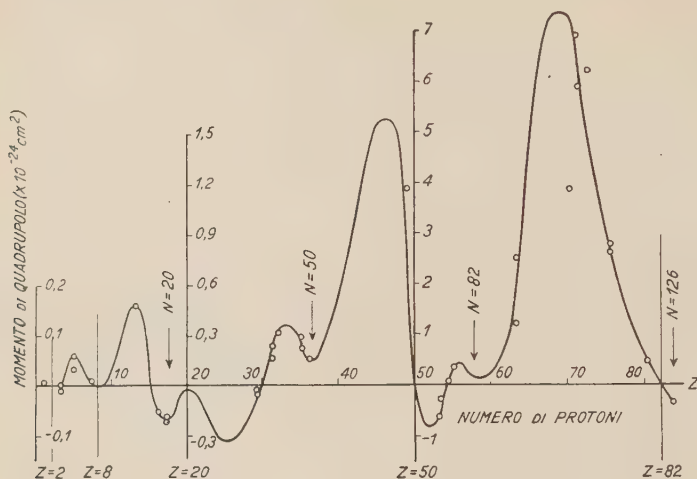


Fig. 9.

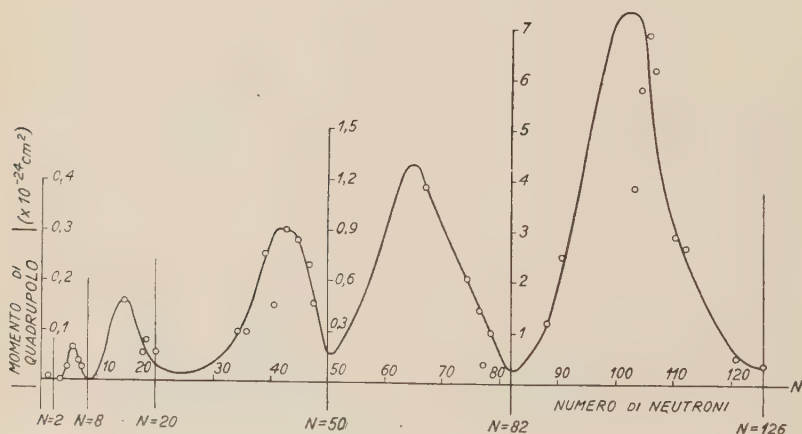


Fig. 10.

Data questa coincidenza non certo casuale, ed atteso il significato di momento di quadrupolo elettrico, indice e misura del tipo e grado di simmetria di un nucleo, si può ritenere che la periodicità del valore di q debba corrispondere ad una analoga periodicità della struttura interna dei nuclei. In questo ordine di idee si può immaginare una struttura del nucleo « a cortecce » so-

⁽²⁰⁾ V. bibliografia [21].

vrapposte, costituita ciascuna da un numero ben definito di protoni o neutroni individuato dai valori « critici » 2, 8, 20, 50, 82, 126 di Z o N (in corrispondenza ai quali si ha la saturazione delle varie cortecce). In questo modello pertanto il momento di quadrupolo elettrico di un nucleo verrebbe fornito dai protoni della corteccia esterna non saturata. Uno di questi modelli — sui quali non insistiamo — che meglio si presta a rendere conto delle periodicità nei nuclei, è quello proposto da L. W. NORDHEIM ed M. G. MAYER ⁽²¹⁾; e forse non è azzardato attribuire a questi modelli un valore euristico maggiore di quello di una semplice ipotesi di lavoro.

Un'altra importante conseguenza cui la periodicità del momento q , rivelata dai grafici 9 e 10, dà luogo è la possibilità di prevedere — con un buon margine di sicurezza — i momenti di quadrupolo non ancora determinati sperimentalmente; è infatti lecito e naturale ammettere, attesa la regolarità delle curve $q = q(Z)$ e $q = q(N)$, che i momenti non ancora conosciuti debbano « riempire » le curve suddette. Si ha così modo di conoscere, per lo meno in segno e ordine di grandezza, i momenti di quadrupolo elettrico di tutti i nuclei atomici.

CONCLUSIONE

Dall'esposizione fattane per linee essenziali, risulta l'importanza dei momenti di quadrupolo elettrico nel quadro della fisica del nucleo; si è visto infatti come, oltre a dare una immagine plastica del nucleo dei vari atomi, il momento di quadrupolo nucleare abbia già fornito la spiegazione di interessanti particolarità spettroscopiche quale la struttura iperfina « anomala », ed abbia rivelato fatti di importanza determinante per tutta la fisica del nucleo quale la natura non centrale delle forze nucleari. Ed altri contributi alle nostre conoscenze sulla struttura del nucleo è lecito attendersi dallo studio dei momenti di quadrupolo nucleare (specie in relazione alla periodicità) essendo chiaro che la « forma » di un nucleo, descritta e misurata dal suo momento q , rispecchia di esso l'intima costituzione; il momento di quadrupolo elettrico costituisce pertanto di tutta la poliedrica fenomenologia dei nuclei uno degli aspetti più interessanti e ricchi di possibilità chiarificatrici.

Desidero ringraziare il prof. P. CALDIROLA, che mi ha suggerito l'argomento di questa rassegna, per l'interessamento dimostrato.

(²¹) V. bibliografia [22]-[25].

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. TOLANSKY: *Hyperfine structure in line spectra and nuclear spin* (London, 1946).
- [2] H. KOPFERMAN: *Kernmoment* (Leipzig, 1941).
- [3] H. SCHULER e T. SCHMIDT: *Zeits. Phys.*, **94**, 457 (1935).
- [4] H. CASIMIR: *On the Interaction between Atomic Nuclei and Electrons* (Teyler's Tweede Genootschap, E. F. Bohn, Haarlem, 1936).
- [5] W. GORDY: *Rev. of Mod. Phys.*, **20**, 668 (1948).
- [6] D. K. COLES e W. E. GOOD: *Phys. Rev.*, **70**, 979 (1946).
- [7] J. H. VAN VLECK: *Phys. Rev.*, **71**, 468 (1947).
- [8] J. M. KELLOG, I. I. RABI, N. F. RAMSEY e J. R. ZACHARIAS: *Phys. Rev.*, **55**, 318 (1939); **57**, 677 (1940).
- [9] L. DE BROGLIE: *De la mécanique ondulatoire à la théorie du noyau* (Paris, 1946).
- [10] H. A. BETHE: *Elementary Nuclear Theory* (New York, 1947).
- [11] L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948).
- [12] W. RARITA e J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **59**, 436 (1941).
- [13] E. AMALDI: *Il sistema protone-neutrone* (Roma, 1941).
- [14] P. CALDIROLA: *Phys. Rev.*, **69**, 608 (1946); *Nuovo Cimento*, **4**, 89 (1947).
- [15] R. G. SACHS: *Phys. Rev.*, **72**, 91 (1947).
- [16] H. PRIMAKOF: *Phys. Rev.*, **72**, 118 (1947).
- [17] G. BREIT: *Phys. Rev.*, **71**, 400 (1947).
- [18] G. BREIT e J. BLOK: *Phys. Rev.*, **72**, 135 (1947).
- [19] W. GORDY: *Phys. Rev.*, **76**, 139 (1949).
- [20] G. J. BENE, P. M. DENIS e R. C. EXTERMANN: *Phys. Rev.*, **76**, 1255 (1949).
- [21] M. G. MAYER: *Phys. Rev.*, **74**, 235 (1949).
- [22] L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 1894 (1949).
- [23] E. FEENBERG, K. C. HAMMACK e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 1877 (1949).
- [24] M. G. MAYER: *Phys. Rev.*, **75**, 1969 (1949).
- [25] R. D. HILL: *Phys. Rev.*, **76**, 998 (1949).
- [26] C. H. TOWNES, H. H. FOLEY e W. LOW: *Phys. Rev.*, **76**, 1415 (1949).

SUMMARY

The paper deals with the electrical fourpole moments of the atomic nuclei. Therefore first of all (n. 1-3) is given the general definition of electrical fourpole moment for any distribution of electricity. It results from the discussion that the moment q is an entity apt to characterize the form of the distribution herself; the sign of q distinguishes in fact the kind of symmetry of the distribution (sphere, elongated ellipsoid, flattened ellipsoid), whereas its absolute value gives the degree of deviation from the spherical symmetry. Successively the paper deals with the question of the existence of electrical moments $q \geq 0$ in the atomic nuclei. The paper deals however beforehand (n. 4-5) briefly with the other moments - mechanical and magnetical - of the nuclei, and this for logical and chronological reasons, as the hypothesis and the theory of the mechanical, magnetical and electrical (fourpole) moments of the nuclei originate

from successive discoveries in the structure of the spectra (fine, hyperfine and « anomalous » hyperfine structure). In n. 6 is explained how and which spectroscopical anomalies have originally suggested the idea of the existence in the nuclei of electrical fourpole moments $q \neq 0$. In the following numbers (7-9) these ideas are quantitatively developed. Starting from the quantistic definition of the fourpole moments of the nucleus and of the electronic cloud ($q_n = \int_{\infty} \psi_n^* r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \psi_n dS$;

$q_e = \int_{\infty} \psi_e^* r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \psi_e dS$), one proceeds to calculate - by means of a simplified

atomic pattern - the electrostatic interaction energy between nucleus and electrons, supposing the nucleus not necessarily spherical. The results of the theory are in agreement with the spectroscopical experience (n. 9) and furnish therefore a convincing indirect proof of the existence of nuclear moments $q \gtrless 0$. In the three following numbers (10-12) a short account is given of the methods for the experimental determination of the nuclear fourpoles (optical spectroscopy, microwaves spectroscopy, magnetic resonance), and in a table are given experimental results till now obtained. The examination of these results has already given rise to important deductions, still subject to development and discussion, concerning nuclear forces and the structure of nuclei: non central nature of the nuclear forces; problem of the deuteron; periodicity and prevision of moments q ; « shell » model of the nucleus. These ideas and hypotheses are very summarily and only qualitatively exposed in the last three numbers (13-15). From all this results the importance of the electrical fourpole moments in the frame of the nuclear physics and how it may be foreseen that from their study may derive new and important contributions to our knowledge of the atomic nucleus.

La funzione di Dirac e un criterio di completezza per sistemi di funzioni ortonormali.

L. CASTOLDI

Genova

(ricevuto il 4 Aprile 1950)

Riassunto. — Si collegano alcune precisazioni sulla definizione della funzione di DIRAC colla formulazione di un criterio di completezza per sistemi di funzioni ortonormali. Si trattano esempi relativi alle serie di FOURIER e agli integrali doppi di FOURIER e di BESSEL.

1. — La funzione di Dirac.

Nel seguito del presente lavoro faremo applicazione della nota funzione δ di DIRAC ⁽¹⁾ alla formulazione di una condizione caratteristica di completezza per un sistema di funzioni ortogonali e normali rispetto al problema della approssimazione lineare puntuale di una generica funzione continua a tratti.

Poichè l'impiego del richiamato algoritmo desta tuttora qualche ragionevole perplessità, riteniamo utile, in proposito, qualche breve precisazione.

Denoteremo con X l'insieme numerico, limitato o no, dei valori consentiti ad una variabile reale x . Supporremo tale insieme costituito, nel caso più generale, da una successione di punti isolati x_1, x_2, \dots (*spettro discreto*) e di un intervallo o successione di intervalli (*spettro continuo*: X_0) separati e non contenenti, neppure come estremi, punti della precedente successione. Riguardo agli intervalli di X_0 supporremo anche che un numero finito (eventualmente nullo) di essi cada per intero in ogni intervallo finito dell'asse x . Con Δx indicheremo poi l'insieme parziale di X contenuto in un generico intervallo

⁽¹⁾ Per essa, si confronti, ad esempio: P. A. M. DIRAC: *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, 1947), p. 58.

finito dell'asse reale. Non va escluso che, in singole circostanze specifiche, l'insieme X si identifichi colla successione dei punti isolati x_i o con X_0 , ma le notazioni che stiamo per adottare valgono in ogni caso.

Abbrevieremo sistematicamente scritture che comportino come addendi sommatorie sullo spettro discreto e integrali sullo spettro continuo, sostituendole con altre contenenti soltanto il simbolo di integrazione. Scriveremo così, per esempio:

$$\int_X F(x) dx \quad \text{in luogo di} \quad \sum_i F(x_i) + \int_{X_0} F(x) dx$$

e

$$\int_{\Delta X} F(x) dx \quad \text{in luogo di} \quad \sum_i (\Delta X) F(x_i) + \int_{\Delta X_0} F(x) dx,$$

ritenendo che $F(x)$ sia funzione per cui hanno significato le operazioni indicate ⁽²⁾.

Di un punto x_0 di X (di ΔX) converrà dire che è *interno* ad X (a ΔX) sia quando esso è interno, nel senso consueto, ad X (a ΔX), sia quando è punto isolato di X (di ΔX). Dei rimanenti punti [estremi di intervalli di X_0 (di ΔX_0), ove questi appartengano ad X] diremo che sono *estremi* di X_0 (di ΔX_0) o di X .

Siano ora y e y_0 due ulteriori variabili reali dotate di un medesimo insieme Y di variabilità, e $\varphi(x)$, $\psi(y)$ due funzioni reali positive, rispettivamente limitate in X , Y e continue in X_0 , Y_0 , aventi ufficio di *funzioni peso* nelle integrazioni su x e su y .

Sia poi $v(x | y, y_0)$ una funzione di x , y e y_0 , limitata in X , Y , continua in X_0 , Y_0 e, in generale, complessa. Diremo che l'integrale $\int_X v(x | y, y_0) \varphi(x) dx$ è la *funzione di DIRAC* $\delta(y - y_0)$:

$$(1) \quad \int_X v(x | y, y_0) \varphi(x) dx = \delta(y - y_0),$$

ovè avvenga che sia, per ogni ΔY :

$$(2) \quad \int_X \varphi(x) dx \int_{\Delta Y} v(x | y, y_0) \psi(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } y_0 \text{ è esterno a } \Delta Y \\ 1/2 & \text{se } y_0 \text{ è estremo di } \Delta Y \\ 1 & \text{se } y_0 \text{ è interno a } \Delta Y. \end{cases}$$

In luogo di (2) si suole anche scrivere, con un simbolismo che, congiunta-

⁽²⁾ Alle medesime scritture si perverrebbe, notoriamente, facendo uso del concetto di integrale di STIELTJES, ma preferiamo interpretare le presenti notazioni come semplici scritture abbreviate, non richiedendo ciò alcun particolare approfondimento della nozione di integrale.

mente ad (1), richiameremo come *prima convenzione di DIRAC*

$$(3) \quad \int_{\Delta Y} \delta(y - y_0) \psi(y) dy = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases}$$

nelle alternative indicate.

Giova insistere sul fatto che le scritture (1) e (3), come la stessa denominazione di funzione δ attribuita al primo membro di (1), hanno carattere puramente simbolico (l'integrale in (1) è generalmente non convergente); il loro uso nei calcoli è pertanto giustificato — e spesso utile — solo in quanto equivalga a una abbreviazione dell'effettiva uguaglianza (2). Quest'ultima poi afferma, sostanzialmente, che l'integrale (1), per sè generalmente privo di significato, ne acquista uno, fornito dal secondo membro di (2), ove si effettui una integrazione *sotto il segno* su un ΔY arbitrario.

Approfitando di questa arbitrarietà, e supposto che una sola delle alternative su y_0 si mantenga verificata durante il processo di passaggio al limite, in luogo di (2) e (3) si può scrivere:

$$(2') \quad \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \int_X \varphi(x) dx \int_{\Delta y} v(x | y, y_0) \psi(y) dy = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases}$$

e

$$(3') \quad \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \int_{\Delta Y} \delta(y - y_0) \psi(y) dy = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1, \end{cases}$$

relazioni che, nel caso in cui y_0 sia punto isolato di Y , significano, più semplicemente:

$$(2'') \quad \psi(y_0) \int_X \varphi(x) v(x | y_0, y_0) dx = 1$$

$$(3'') \quad \psi(y_0) \delta(y - y_0) = \delta_{yy_0} \equiv \begin{cases} 0 & \text{per } y \neq y_0 \\ 1 & \text{per } y = y_0. \end{cases}$$

Aggiungiamo, a questo punto, per $v(x | y, y_0)$ l'ipotesi — in pratica assai poco restrittiva — che, per ogni valore di x per cui essa non si annulli identicamente, gli insiemi degli zeri di $\mathcal{R}[v]$ e di $\mathcal{I}[v]$ ⁽³⁾ siano separatamente privi di punti di accumulazione nel piano rappresentativo delle variabili y e y_0 .

Se allora $f(y)$ è una funzione (generalmente complessa) continua a tratti

⁽³⁾ Con $\mathcal{R}[z]$ e $\mathcal{I}[z]$ denotiamo rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario in z .

in Y ⁽⁴⁾, una semplice applicazione del teorema del valor medio ⁽⁵⁾ all'integrale interno, previo spezzamento dell'intervallo di integrazione in quelle parti in cui esso è eventualmente diviso dai punti di discontinuità di $f(y)$, dagli estremi di Y in ΔY e dagli zeri della funzione $v(x | y, y_0)$, consente di riconoscere che è:

$$(4) \quad \int_{\bar{X}} \varphi(x) dx \int_{\Delta Y} v(x | y, y_0) f(y) \psi(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{per } y_0 \text{ esterno a } \Delta Y \\ (1/2)f(y_0) & \text{per } y_0 \text{ estremo di } \Delta Y \\ & \text{ma non di } Y_0 \\ f(y_0) & \text{in ogni altro caso.} \end{cases}$$

In luogo di (4), si suole anche scrivere, con un simbolismo che è naturale estensione di (3) e che, congiuntamente ad (1), richiameremo come *seconda convenzione di DIRAC*:

$$(5) \quad \int_{\Delta Y} \delta(y - y_0) f(y) \psi(y) dy = \begin{cases} 0 \\ (1/2)f(y_0) \\ f(y_0) \end{cases}$$

nelle alternative indicate.

Del resto si riconosce subito, inversamente, che, ove valga la (5), nel significato (4), per ogni funzione $f(y)$ del tipo indicato, l'assegnata funzione $v(x | y, y_0)$ soddisfa pure la condizione (2) e pertanto l'integrale (1) è la funzione δ secondo la prima convenzione di DIRAC.

Le relazioni (2) e (4) sono pertanto equivalenti come definizione delle scritture simboliche [(1), (3)] e [(1), (4)].

⁽⁴⁾ Per tale intendiamo una funzione limitata in Y , continua in Y_0 salvo eventuali discontinuità di prima specie cadenti in numero finito in ogni intervallo finito, e tale che se y_i è un siffatto punto di discontinuità o un estremo appartenente ad Y di un intervallo di Y_0 , sia ivi, con noto significato dei simboli:

$$f(y_i) = \frac{1}{2} \{ f(y_i +) + f(y_i -) \}, \quad \text{o} \quad f(y_i) = \frac{1}{2} f(y_i +), \quad \text{o} \quad f(y_i) = \frac{1}{2} f(y_i -),$$

secondochè y_i è interno a Y_0 o estremo sinistro o estremo destro di un intervallo di Y_0 .

⁽⁵⁾ Qui il teorema del valor medio va applicato nella sua accezione generalizzata

$$\int_a^b f(y) \varphi(y) dy = f(\bar{y}) \int_a^b \varphi(y) dy$$

valida per $f(y)$ continua e $\varphi(y)$ di segno costante in (a, b) . L'applicazione di questo teorema è resa possibile dall'ipotesi fatta sugli zeri di $v(y | y_0)$.

2. - Condizioni di orto-normalità per un sistema di funzioni.

Le condizioni di ortogonalità e normalità per le funzioni — continue e, in generale complesse nella variabile reale x — di un sistema $\{u(\lambda|x)\}$ si esprimono, come è noto ⁽⁶⁾, agevolmente mediante la funzione di DIRAC. Si ha infatti per le funzioni di un siffatto sistema:

$$(6) \quad \int_X u^*(\lambda|x)u(\lambda_0|x)\varphi(x)dx = \delta_{\lambda\mu} \equiv \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda \neq \lambda_0 \\ 1 & \text{per } \lambda = \lambda_0, \end{cases} \quad (7)$$

se entrambi i valori λ e λ_0 del parametro appartengono allo spettro discreto; mentre, con λ_0 scelto comunque in Λ si ha:

$$(6') \quad \int_X \varphi(x)dx \int_{\Delta\Lambda} u^*(\lambda|x)u(\lambda_0|x)\psi(\lambda)d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_0 \text{ è esterno a } \Delta\Lambda \\ 1/2 & \text{se } \lambda_0 \text{ è estremo di } \Delta\Lambda \\ 1 & \text{se } \lambda_0 \text{ è interno a } \Delta\Lambda. \end{cases}$$

Le relazioni (6) e (6') confrontate con (2) e (2'') consentono di affermare che è, per le funzioni del considerato sistema ortonormale

$$(7) \quad \boxed{\int_X u^*(\lambda|x)u(\lambda_0|x)\varphi(x)dx = \delta(\lambda - \lambda_0)}.$$

3. - Un criterio di completezza per un sistema ortonormale.

Ci proponiamo ora di mostrare che, attraverso la funzione di DIRAC, è anche possibile caratterizzare l'eventuale proprietà di completezza del sistema in istudio rispetto al problema della approssimazione lineare puntuale di una arbitraria funzione continua a tratti.

Ritenendo, per generalità, illimitatamente esteso lo spettro dei valori della variabile x , supponiamo che il sistema $\{u(\lambda|x)\}$ sia uniformemente limitato in un conveniente intorno del punto all'infinito dell'asse x . Consideriamo inoltre funzioni complesse $f(x)$ continue a tratti e assolutamente integrabili in X . È dunque, con convenienti M ed \bar{x} positivi e per λ qualunque in Λ :

$$(8) \quad |u(\lambda|x)| < M \quad \text{per} \quad |x| > \bar{x},$$

⁽⁶⁾ Si veda, per esempio: E. PERSICO: *Fondamenti della meccanica atomica* (Bologna, 1936), p. 328.

⁽⁷⁾ Con z^* denotiamo la grandezza complessa coniugata di z .

e convergente l'integrale

$$(9) \quad \int_X |f(x)| \varphi(x) dx.$$

In queste ipotesi è pure convergente, uniformemente in Λ , l'integrale:

$$(10) \quad f_\lambda = \int_X u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx,$$

e ci proponiamo di dimostrare che

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema ortonormale

$$(11) \quad \{ u(\lambda | x) \}$$

di funzioni continue, con zeri di $\mathcal{R}[u]$ e $\mathcal{I}[u]$ privi di punti di accumulazione in X , uniformemente limitato al divergere di x , sia completo per l'approssimazione lineare puntuale della più generale funzione $f(x)$ continua a tratti e assolutamente integrabile in X , è che si abbia:

$$(12) \quad \boxed{\int_A u^*(\lambda | x) u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda = \delta(x - x_0)},$$

ossia, conformemente alla prima convenzione di DIRAC:

$$(12') \quad \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_{\Delta X} u^*(\lambda | x) \varphi(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \text{ è esterno a } \Delta X \\ 1/2 & \text{se } x_0 \text{ è estremo di } \Delta X \\ 1 & \text{se } x_0 \text{ è interno a } \Delta X. \end{cases}$$

La condizione è sufficiente. Infatti, per una $f(x)$ soddisfacente ai requisiti indicati è valida la rappresentazione (5) in cui si sostituisca materialmente la variabile y colla x . Di qui, utilizzando l'espressione (12) della funzione di DIRAC, comunque si scelga, a determinare ΔX , un intorno completo di x_0 , si trae:

$$(13) \quad f(x_0) = \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_{\Delta X} u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx,$$

relazione che, in virtù di (2') e (12') si riduce a una semplice identità ove x_0 sia punto isolato di X .

Segue da (13) che, anche a prescindere dall'ipotesi di assoluta integrabilità

di $f(x)$, si ha (colla medesima precisazione per l'intervallo costruttivo di ΔX):

$$(14) \quad f(x_0) = \lim_{\Delta X \rightarrow X} \int_{\Delta} u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_{\Delta X} u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx \quad (^8).$$

Se poi si tien conto della validità dell'ipotesi richiamata, che assicura l'uniformità della convergenza in Λ dell'integrale (10), dall'ultima relazione si trae:

$$(15) \quad \begin{cases} f(x_0) = \int_{\Lambda} f_{\lambda} u(\lambda | x) \psi(\lambda) d\lambda \\ f_{\lambda} = \int_X u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx, \end{cases}$$

complesso di relazioni che dimostra la sviluppabilità di $f(x)$ in integrale doppio (o in serie, o in serie e in integrale doppio) delle $u(\lambda | x)$.

Inversamente, se vale lo sviluppo (15) per una generica $f(x)$ continua a tratti e assolutamente integrabile in X , sussiste (12) in virtù della stessa seconda convenzione di DIRAC.

4. - Esempi.

A) Consideriamo, per esempio, il sistema ortonormale di FOURIER

$$(16) \quad u(n | x) \equiv \frac{\exp [inx]}{\sqrt{2\pi}} \quad \left(\begin{array}{l} n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ X \equiv (0 < x < 2\pi) \\ \varphi(x) = 1; \quad \psi(n) = 1 \end{array} \right).$$

Esso soddisfa alle condizioni qualitative del numero 3. Inoltre, posto $\Delta X = x'' - x'$, con x' e x'' in X ($x'' > x'$), e denotata con $F(x_0; x', x'')$ l'attuale determinazione del primo membro di (12'), si ha:

$$\begin{aligned} F(x_0; x', x'') &= \frac{x'' - x'}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} \cos n(x - x_0) dx = \\ &= \frac{x'' - x'}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ \sin n(x'' - x_0) - \sin n(x' - x_0) \}. \end{aligned}$$

(⁸) La relazione (14) generalizza una nota formula di G. GIORGI relativa all'integrale doppio di FOURIER:

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-a}^a f(\xi) \exp [i\omega(\xi - x)] d\xi.$$

Ora, con $x_1 > x_0$ ed entrambi appartenenti ad X , si ha notoriamente:

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n(x_1 - x_0) = \frac{\pi - (x_1 - x_0)}{2}.$$

Con x' e x'' entrambi maggiori di x_0 , è pertanto:

$$F(x_0; x', x'') = \frac{x'' - x'}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi - (x'' - x_0)}{2} - \frac{\pi - (x' - x_0)}{2} \right] = 0.$$

Allo stesso risultato si perviene se x' e x'' sono entrambi minori di x_0 .

Se è invece $x' < x_0 < x''$, si ha:

$$F(x_0; x', x'') = \frac{x'' - x'}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi - (x'' - x_0)}{2} + \frac{\pi - (x_0 - x')}{2} \right] = 1.$$

Infine, coincidendo, per esempio x' con x_0 , si ottiene:

$$F(x_0; x_0, x'') = \frac{x'' - x_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi - (x'' - x_0)}{2} = \frac{1}{2},$$

ed ugual risultato si ricava dall'ipotesi $x_0 = x''$.

Le condizioni (12') del criterio generale del numero 3 sono dunque soddisfatte, e può pertanto affermarsi che il sistema (16) è completo per l'approssimazione lineare puntuale delle funzioni continue a tratti su X . Va soltanto notato che, consentendo la periodicità delle funzioni (15) di sostituire all'intervallo ($0 < x < 2\pi$) un qualunque altro intervallo della forma ($\delta < x < 2\pi + \delta$) purchè si estenda a quest'ultimo la definizione di $f(x)$ col fare $f(x + 2\pi) = f(x)$, così, sarà sempre possibile scegliere δ in modo che sia ad un tempo $0 < \delta < 2\pi$ ed $f(x)$ continua in δ , dal che risulta poi $f(\delta +) = f(2\pi + \delta -)$.

L'ipotesi di continuità a tratti di $f(x)$ impone allora che sia $f(2\pi) = (1/2) \{ f(2\pi -) + f(2\pi +) \} = (1/2) \{ f(2\pi -) + f(0 +) \}$. Questo stesso, secondo le premesse, è il valore fornito per $x = 2\pi$ dallo sviluppo di FOURIER costruito a partire dall'intervallo ($\delta < x < 2\pi + \delta$), ma altresì, per la richiamata periodicità, quello fornito per $x = 2\pi$ (e per $x = 0$) dallo sviluppo originario. Possiamo quindi concludere che è insita nella natura stessa periodica del sistema (16) di FOURIER la necessità di completare la definizione di continuità a tratti di una $f(x)$ assegnata in X , nell'intento di una sua rappresentazione in serie delle funzioni di quel sistema, col porre

$$f(2\pi) = f(0) = (1/2) \{ f(0 +) + f(2\pi -) \}.$$

B) Nel caso di un intervallo infinito di variabilità della x [$X \equiv (-\infty, +\infty)$].
il primo membro di (12') calcolato per il sistema continuo di FOURIER

$$(16') \quad u(\lambda | x) = \frac{\exp[i\lambda x]}{\sqrt{2\pi}} \left(\begin{array}{l} \Lambda \equiv (-\infty, +\infty) \\ X \equiv (-\infty, +\infty) \\ \varphi(x) = 1; \psi(\lambda) = 1 \end{array} \right),$$

pure soddisfacente alle condizioni qualitative del numero 3, diventa, con notazioni analoghe a quelle adottate in A):

$$(18) \quad F(x_0; x', x'') = \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{\lambda}} d\lambda \int_{x'}^{x''} \cos \lambda(x - x_0) dx = \\ = \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{x'}^{x''} \frac{\text{sen } \bar{\lambda}(x - x_0)}{x - x_0} dx.$$

L'uguaglianza di questa espressione col secondo membro di (12'), nelle diverse alternative, è assicurata da una nota formula integrale di DIRICHLET. Quest'ultima, pertanto, dal punto di vista da cui qui ci poniamo, riesce interpretabile come espressione della completezza del sistema continuo (16') di FOURIER per il problema dell'approssimazione lineare puntuale delle funzioni continue a tratti su tutto l'asse reale ed ivi assolutamente integrabili.

5. — Completezza dei sistemi funzionali originati dai problemi con dati al contorno del tipo di Sturm-Liouville.

Nel corso del presente numero supporremo l'insieme X coincidente con X_0 e questo costituito di un unico intervallo, limitato o no, dell'asse delle x .

In tale ipotesi, suppongasi riconosciuto che il sistema ortonormale (11), soddisfacente alle condizioni qualitative del numero 3, sia completo per la approssimazione lineare puntuale (eventualmente uniforme) delle funzioni $f(x)$ continue, assolutamente integrabili e dotate di derivate successive continue (l'ultima, eventualmente, continua a tratti) fino a un certo ordine n incluso. Richiameremo brevemente siffatte funzioni $f(x)$ come appartenenti alla classe C_n .

È facile riconoscere che, *in tali condizioni, il sistema (11) è anche completo per l'approssimazione lineare puntuale delle funzioni continue a tratti e assolutamente integrabili (fatta eccezione per gli unici eventuali due punti estremi di X).*

Si ha infatti, per ipotesi, con x_0 qualunque appartenente ad X , ed $f(x)$ di classe C_n :

$$(19) \quad f(x_0) = \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_X u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx.$$

Scelto ora comunque ΔX in X e x_0 interno a ΔX , è sempre possibile modificare la definizione di $f(x)$ in modo che la funzione $f_1(x)$ ottenuta sia ancora di classe C_n , si identifichi in $(X - \Delta X)$ con una prefissata generica funzione $F(x)$ di tale classe, e in ogni punto interno a ΔX (in particolare in x_0) con $f(x)$.

Con (19), che può scriversi:

$$(19') \quad f(x_0) = \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \left\{ \int_{\Delta X} u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx + \int_{X-\Delta X} u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx \right\},$$

si ha anche, allora:

$$(20) \quad f(x_0) = \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \left\{ \int_{\Delta X} u^*(\lambda | x) f(x) \varphi(x) dx + \int_{X-\Delta X} u^*(\lambda | x) F(x) \varphi(x) dx \right\}.$$

Di qui segue intanto, per l'arbitrarietà di $F(x)$ in C_n e di ΔX attorno a x_0 :

$$(21) \quad \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_{\Delta_1 X} u^*(\lambda | x) \varphi(x) dx = 0,$$

per ogni $\Delta_1 X$ cui x_0 sia esterno, e quindi

$$\int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_{\Delta_1 X} u^*(\lambda | x) f_0(x) dx = 0,$$

per ogni $f_0(x)$ in C_n .

È poi sempre possibile scegliere $f_1(x)$ in C_n , identificantesi con la costante 1 in ΔX . Da (20) e (21'), nelle quali rispettivamente si assuma $F(x) = f_1(x)$ e $f_0(x) = f_1(x)$, segue allora:

$$(21') \quad \int_A u(\lambda | x_0) \psi(\lambda) d\lambda \int_{\Delta X} u^*(\lambda | x) \varphi(x) dx = 1.$$

Le precedenti considerazioni, essendo fondate sull'ipotesi di x_0 interno a ΔX , non sussistono nel caso in cui x_0 coincida coll'eventuale unico estremo di X . A prescindere da questo eventuale punto eccezionale, le (21), (21') complessivamente si identificano colla (12) e dimostrano pertanto la asserita completezza del sistema considerato.

Ove si abbiano presenti noti risultati ⁽⁹⁾ della teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie (autoaggiunte, con condizioni regolari agli estremi), il risultato del presente numero consente di affermare che *tutti i sistemi ortonormali di funzioni in una variabile cui danno origine, attraverso il consueto procedimento di separazione delle variabili, i problemi con dati al contorno della Fisica matematica — problemi del tipo di STURM-LIOUVILLE — consentono, tanto nel caso di uno spettro discreto che in quello di uno spettro continuo, di autovalori e purchè si verifichino, come generalmente accade, le condizioni qualitative del numero 3, l'approssimazione lineare puntuale (eccezion fatta per gli eventuali*

⁽⁹⁾ Si confronti, per esempio: R. COURANT e D. HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik* (Berlin, 1931), vol. I, pp. 310-312 e p. 371.

estremi di X) per funzioni qualunque continue a tratti e assolutamente integrabili in X .

Per tutti gli accennati sistemi le relazioni (12), (12') sussistono, colla ricor-data eventuale eccezione, come conseguenza della provata completezza e, a seconda che il sistema in questione sia dotato di autovalori discreti o continui, le relazioni stesse costituiscono una generalizzazione della formula (17) o dell'integrale (18) di DIRICHLET.

6. - Caso in cui le funzioni $u(x | \lambda)$ sono simmetriche in x e λ .

Ritornando alle ipotesi generali del numero 3, interessa considerare il caso in cui le funzioni del sistema ortonormale $\{u(\lambda | x)\}$ siano simmetriche in x e λ , giacchè allora necessariamente coincidono, salvo il diverso nome della variabile, gli insiemi X e Λ nonchè le funzioni peso $\varphi(x)$ e $\psi(\lambda)$. Invero la prima coincidenza consegue direttamente dall'ipotesi di simmetria, la seconda indirettamente, attraverso la condizione (6') di ortonormalità. Questa, come riferentesi alle funzioni $u(\lambda | x)$ simmetriche in λ ed x , non può che mutarsi in se stessa scambiando l'ufficio delle due variabili, e ciò è solo possibile ove sia $\psi(x) = \varphi(x)$.

Effettivamente, da (6'), scritta sotto la forma

$$(6'') \quad \int_X u(\lambda_0 | x) \varphi(x) dx \int_{\Lambda} u^*(\lambda | x) \psi(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases},$$

collo scambio indicato si ottiene

$$(22) \quad \int_{\Lambda} u(x_0 | \lambda) \psi(\lambda) d\lambda \int_X u^*(x | \lambda) \varphi(x) dx = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases}.$$

D'altra parte, lo scambio di nome delle due variabili dà:

$$(22') \quad \int_{\Lambda} u(x_0 | \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda \int_X u^*(x | \lambda) \psi(x) dx = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases},$$

che coincide colla precedente solo se è $\varphi(x) = \psi(x)$.

Dopo ciò la relazione (22), ancora usando della simmetria delle funzioni in istudio, può scriversi:

$$(23) \quad \int_{\Lambda} u(\lambda | x_0) \varphi(\lambda) d\lambda \int_X u^*(\lambda | x) \varphi(x) dx = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases},$$

formula che coincide colla determinazione attuale della relazione (12') di completezza. Concludiamo pertanto che:

Supposte le funzioni del sistema $\{u(\lambda|x)\}$ simmetriche in λ ed x e ritenute valide le ulteriori condizioni qualitative del numero 3, la relazione di completezza (12') è implicita in quella (6') di ortonormalità del sistema.

Per esempio, con $\varphi(x) = \psi(x) - 1$, la relazione (18) di DIRICHLET per il sistema (16') continuo delle funzioni di FOURIER consegue immediatamente dalla simmetria in λ ed x di quelle funzioni e dal carattere ortonormale del loro sistema.

Analogamente, con $\varphi(r) = \psi(r) - r$ e $R \equiv (0 < r < +\infty)$, $\Lambda \equiv (0 < \lambda < +\infty)$, dall'ortonormalità del sistema continuo e simmetrico delle funzioni di BESSEL

$$(24) \quad \int_0^{\infty} r \, dr \int_{\Lambda\Lambda} I_n(\lambda r) I_n(\lambda_0 r) \lambda \, d\lambda = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases} \quad (\lambda_0 > 0),$$

consegue immediatamente la relazione di completezza

$$(25) \quad \int_0^{\infty} \lambda \, d\lambda \int_{\Lambda R} I_n(\lambda r) I_n(\lambda r_0) r \, dr = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases} \quad (r_0 > 0),$$

e la possibilità di sviluppo in serie puntualmente convergente per ogni funzione $f(r)$ continua a tratti e assolutamente integrabile nella forma

$$(26) \quad \begin{cases} f(r_0) = \int_0^{\infty} I_n(\lambda r_0) \lambda \, d\lambda \int_0^{\infty} f(r) I_n(\lambda r) \, dr, \\ \int_0^{\infty} |f(r)| r \, dr = K \quad (\text{finito}). \end{cases}$$

7. - Estensione al caso di più variabili indipendenti.

Tutti i risultati dei numeri precedenti si possono immediatamente estendere al caso di più variabili x_1, x_2, \dots, x_n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Convenendo di abbreviare coll'indicazione di una sola lettera x o λ i gruppi di lettere (x_1, x_2, \dots, x_n) o $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, e purchè si intenda che $\delta[(x_1, \dots, x_n) - (x_1^0, \dots, x_n^0)]$ significhi $\delta(x_1 - x_1^0) \cdot \delta(x_2 - x_2^0) \cdot \dots \cdot \delta(x_n - x_n^0)$, le precedenti scritture non necessitano di alcuna, neppur formale, modificazione. Va solo accennato che il risultato del numero 5, relativo alla completezza dei sistemi funzionali generati dai

problemi con dati al contorno della Fisica matematica, si riferisce, nel caso di più variabili, alle autofunzioni di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali autoaggiunte, con dati regolari al contorno, costituenti la più ovvia generalizzazione del problema di STURM-LIOUVILLE ⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ R. COURANT e D. HILBERT: ⁽⁹⁾ pp. 319 e 371.

SUMMARY

DIRAC's function is employed to obtain a useful criterion of completeness for orthonormal systems of functions. Applications are made to FOURIER's series and to BESSEL's and FOURIER's double integrals.

PROPOSTE E DISCUSSIONI

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sulla questione delle unità “kilopondo” e “joule”.

E. PERUCCA

Istituto di Fisica del Politecnico di Torino

(ricevuto il 9 Giugno 1950)

Con titolo non molto dissimile da questo, è recentemente apparso sulla *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* ⁽¹⁾, il testo di una deliberazione del Consiglio Scientifico di questa Associazione, relativamente all'introduzione di dette unità. Per l'autorità che in tutti gli ambienti tecnico-scientifici si riconosce al *Verein Deutscher Ingenieure* (V.D.I.) per i riflessi pratici che possono derivare da quella deliberazione, a me sembra che essa non possa lasciarsi passare sotto silenzio.

In sostanza, il Consiglio Scientifico del V.D.I.:

— riguardo al *kilopondo*, propone che si continui ad usare il termine kilogrammo sia nel senso di kilogrammo-massa, sia nel senso di kilogrammo-peso, che quando occorra distinguere tra massa e peso, si usino i simboli *kgi*, *kgp*; si duole che un recente provvedimento legislativo del Land Nordrhein-Westfalen introduca il termine «kilopondo» col significato di kilogrammo-peso, senza che si siano dapprima ascoltati tutti i circoli interessati, nè se ne sia assicurata un'accoglienza internazionale favorevole; in definitiva si manifesta piuttosto contrario al nuovo termine;

— riguardo al *joule*, unità di calore, ritiene che la decisione, presa (1948) dal Comité International des Poids et Mesures, di abolire la caloria sia così distante dalla realtà che probabilmente non si riuscirà ad applicarla.

In conclusione non mi sembra errato dire che le deliberazioni del Consiglio Scientifico del V.D.I. costituiscono una posizione negativa riguardo alle innovazioni metrologiche allo studio presso il Comité International des Poids et Mesures. Conviene dunque esaminare le cose da vicino.

1. — Kilogrammo o kilopondo.

Mi sembra che siano essenziali alcune premesse e che anzitutto occorra stabilire se si è d'accordo su di esse.

Ecco le premesse:

1) Si riconoscono i vantaggi di un sistema coerente ⁽²⁾ di misurazioni?

2) Si accetta che tale sistema coerente si basi per la Meccanica su tre sole classi di grandezze (e quindi su tre sole unità) fondamentali?

3) Si riconoscono i vantaggi di un accordo internazionale sulla scelta di

⁽¹⁾ Zur Frage der Einführung der Messeinheiten Kilopond und Joule (senza nome di autore) in *Zeits. V.D.I.*, 92, 161 (1° Marzo 1950).

⁽²⁾ H. GEIGER e K. SCHEEL: *Handbuch der Physik*, vol. II (Berlino, 1926), cap. 1°, di J. WALLOT; E. PERUCCA: *Atti Acc. Sc. Torino*, 79, 38 (1944).

queste tre classi di grandezze fondamentali e delle relative unità?

Se, come spero, si risponderà affermativamente a queste tre domande, saremo d'accordo sulle questioni di principio, e talune difficoltà pratiche, a mio parere troppo esaltate nella deliberazione del Consiglio Scientifico della V.D.I., non dovranno affatto scoraggiare.

Forse il disaccordo tra i vari enti scientifici e tecnici si avrà sui seguenti ulteriori punti:

4) Si è d'accordo nello stabilire come grandezze fondamentali della meccanica, le lunghezze, le durate e le masse?

5) Accettato il punto 4), si è d'accordo sulle rispettive unità fondamentali: metro, secondo, kilogrammo?

Si direbbe che, sul punto 4), il Consiglio Scientifico del V.D.I. si sia diviso tra fautori del sistema lunghezze, durate, masse e fautori del sistema lunghezze, durate, forze. Gli uni chiedono una unità fondamentale di massa (kilogrammo-massa); gli altri chiedono un'unità fondamentale di forza (kilogrammo-forza). Quest'ultimo, per il modo con cui sempre se ne realizzano i campioni viene chiamato « kilogrammo-peso » e per esso il POHL ha proposto il termine « kilopondo ». La questione del kilogrammo-massa e del kilopondo sussiste in quanto tuttora sussiste questa divisione.

È noto come questo scisma, non più esistente tra i fisici, corrisponde in sostanza alla divisione dei tecnici in due categorie: quelli che restano fedeli al kilogrammetro ed al cavallo-vapore e quelli che si servono soltanto del joule e del watt. Il Consiglio Scientifico del V.D.I. cerchi di prevedere quali di queste unità di lavoro e di potenza ha motivo per prevalere, e cerchi di cooperare fin d'ora con la sua riconosciuta autorità alla conseguente unificazione internazionale dei sistemi di misurazioni.

Specialmente ci ha colpito lo scetticismo che traspare, ad esempio, dalle seguenti righe della relazione apparsa nella *Zeitschrift* del V.D.I.: « la parola

grammo che ha avuto fino ad oggi un doppio significato non potrebbe da domani significare univocamente una unità di massa ». Da domani no, ma tra qualche decennio sì, se saremo d'accordo e tenaci.

Io oserei esortare il V.D.I. ad avere fiducia nell'esito, anche se questo si prospetta lontano. Dopo che le unità del sistema metrico decimale ebbero sanzione legale, quanti anni sono ancora vissuti la « libbra », il « braccio », il « boccale », l'« iugero », il « moggio » e quanto dureranno ancora prima di scomparire del tutto? Fino a qualche decennio fa, nella regione d'Italia dove io abitavo, tutte le stoffe si vendevano ancora a « canne » (circa 1,9 m) e tutti i generi alimentari a « rotolo » (circa 900 g). Attualmente queste unità sono solo un lontano ricordo delle persone più vecchie. Che situazione metrologica avremmo oggi, se da circa un secolo i legislatori delle varie nazioni, e tra essi i legislatori italiani, invece di stabilire legalmente il sistema metrico decimale, si fosser nutriti degli stessi timori che oggi rendono dubbioso il V.D.I.?

La proposta poi del V.D.I. di usare il kilogrammo come unità di « quantità », quando cioè non interessi stabilire se si tratti di massa o di peso ⁽³⁾, e di usare i termini kilogrammo-massa (kgi) e kilogrammo-forza (kgp) quando la distinzione è necessaria, è una proposta troppo statica. Essa corrisponde allo stato di fatto più consueto ⁽⁴⁾, e lascia tutto allo

⁽³⁾ Ma questi casi sono molto più rari di quanto si immagini; ad es. il caso della stoffa, portato nel citato articolo della *Zeits. V.D.I.*, non è affatto dubbio; la stoffa si vende a massa e non a peso. Un collo di stoffa pesato ad Amburgo e mandato a Cuba sarà rifiutato dal committente perchè pesa meno a Cuba che ad Amburgo? Similmente il potere calorifico, che molti autori ancora oggi riferiscono all'unità di peso, riguarda in realtà l'unità di massa; etc. etc.

⁽⁴⁾ Per es., vedasi E. PERUCCA: *Fisica Generale* (Torino, varie edizioni dal 1931 in poi ed in particolare la 6ª ediz., 1949) ove si segue appunto tale criterio.

statu quo, senza cooperare alla eliminazione dell'attuale grave inconveniente dell'ambiguità del termine « grammo » nella fisica odierna. Tutti i professori di Fisica delle Scuole secondarie ed anche delle Università ne sanno qualche cosa.

Dunque, come ho detto, il problema del kilogrammo-massa e del kilogrammo-peso esiste in quanto non si dà risposta affermativa al punto 4); il kilopondo è null'altro che un nome molto indovinato in luogo di kilogrammo-peso, ma esso ha ragion d'essere soltanto finchè vi sono fisici o tecnici fedeli alla forza come terza grandezza fondamentale della Meccanica. Orbene, in campo nazionale ed internazionale, sono già numerosi gli enti e le personalità interessate alla Metrologia che hanno risposto affermativamente al punto 4), che cioè hanno optato per il binomio joule, watt ed hanno abbandonato il binomio kilogrammetro, cavallo-vapore, e quindi il kilogrammo-peso (o kilopondo), al lento tramonto che si concede alle unità decadute e pur degne di riconoscenza.

Per l'importanza del contributo che il pensiero tedesco ha sempre avuto nel progresso scientifico tecnico, avrei auspicato che anche da parte del V.D.I. fosse venuta una voce a favore del sistema joule, watt e quindi del kilogrammo-massa. Questa voce avrebbe costituito un prezioso apporto al più rapido raggiungimento della meta ultima dell'unificazione metrologica internazionale.

È vero che ciò, di conseguenza, richiede evidentemente l'unità coerente nel sistema metro, kilogrammo-massa, secondo. Per essa fu proposto ed è largamente usato il nome « newton ». Risulta: joule = newton · metro. Ora nell'articolo pubblicato nella citata *Zeitschrift* del V.D.I., questa unità di forza, questo nome sono ignorati. Perché? Che unità di forza usano tutti coloro che misurano la potenza in watt, quindi il lavoro in joule? Si preferisce al newton il joule/m? Ma, logicamente, si giunge al concetto di forza prima che a quello di lavoro.

Si tenterà il termine chilogrammo-massa · m/s²? È troppo complicato, date l'importanza e la frequenza di impiego di tale unità.

Curioso torneo di nomi! In Italia vi fu chi propose quello di « vis », chi quello di « gal ». Il POHL preferisce il joule/m. Come ho detto, in consessi internazionali fu accolto molto favorevolmente, se non unanimemente, il termine « newton », il quale è ormai largamente usato. Quale vantaggio si attende da altri indugi ad accettare la nomenclatura ormai più diffusa?

Al di là della discussione sui nomi, vi è però una questione più importante, che, per quanto so, nessuno ha segnalato col dovuto rilievo.

In molte esperienze di Fisica e di Ingegneria occorrono campioni di forza. Ora la forza peso è di gran lunga la più conveniente a fornire detti campioni; ma oggi essi sono gli stessi che costituiscono anche i campioni di massa. Ciò induce necessariamente a servirsi, come campioni di forza, del « peso » dei « campioni di massa ». Ecco la ragione sostanziale del kilogrammo-peso. Ora nulla vieta di continuare ad usare come campioni di forza i pesi dei campioni di massa; ma, se si vuol conservare alla seconda legge della Dinamica la forma consueta, tra la misura m della massa in kilogrammi-massa, quella p del corrispondente peso in newton e quella g dell'accelerazione in m/s² deve valere la relazione:

$$(1) \quad p. \text{ newton} = g \text{ m/s}^2 \cdot m \text{ kg}_m.$$

Usare il kilopondo si riduce, in sostanza, a non voler eseguire il conguaglio ai newton indicato dalla formula (1), la quale muta nel secondo membro m in M_{kg} .

Non altrimenti si misurano le pressioni in atmosfere o in cm_{Hg} o in cm_{H₂O}, e spesso si trascura di fare il conguaglio di queste comodissime unità empiriche alla unità coerente, dina/cm² nel sistema

cm, g_m , sec. e newton/ m^2 nel sistema m, kg, sec.

Non molto diverso era il caso, circa un secolo fa, quando le forze elettromotrici si misuravano in « daniell ». Ancora oggi si parla di un circuito elettrico, ove è una batteria d'accumulatori di 1, 2, ..., n , ... elementi, ma questa volta non si manca mai di tradurre poi la forza elettromotrice della batteria nel corrispondente numero di volt.

Invece non sempre si esegue il conguaglio della forza-peso di un certo numero di kg_m ai newton corrispondenti.

Se l'abbandono del kilopondo a favore del newton è tanto lento e, secondo l'articolo pubblicato nella *Zeitschrift* del V.D.I., il Consiglio Scientifico del V.D.I. stesso non lo ha ancor preso in considerazione, ciò dipende, a mio parere, dal fatto di non disporre finora, nei laboratori, di pesi campione di 1 newton, dei suoi multipli e dei suoi sottomultipli. Questa mancanza è presto riparata se si tiene conto che, nelle esperienze ove si applicano forze, l'approssimazione delle misurazioni supera l'1% solo in casi molto rari. La costruzione di pesi campione di un newton e relativi multipli o sottomultipli è quindi un compito banale ⁽⁵⁾.

Il pericolo di confondere i campioni di massa con i campioni di peso proveniente dal fatto che 10 newton sono praticamente il peso di un kilogrammo-massa, si elimina facilmente dando ai pesi campione forma diversa da quella tradizionale delle masse campione. Questa distinzione di forma non è soltanto un ripiego, ma corrisponde ad una sostanziale esigenza perchè i campioni di forza richiedono di regola di essere appesi o sovrapposti talora in grande numero.

⁽⁵⁾ Nel mio Laboratorio del Politecnico di Torino ($g = 9,805 \text{ m/sec}^2$) non si fanno più servire i kilogrammi-massa come unità di forza-peso; ma sono stati costruiti e sono già in uso da qualche anno, in tutte le esercitazioni pratiche degli studenti in misurazioni di elasticità, campioni *ad hoc* tarati in newton.

Ognuno dei campioni di forza-peso porterà inciso il suo valore in newton (0,01, 0,1, 1... Nw) e, *ad abundantiam*, per le misurazioni di forza più precise, porterà anche il valore all'1‰ dell'accelerazione di gravità del luogo ove devono essere usati. Entro siffatta approssimazione, questi campioni, precisi, per es. a Göttingen, servono benissimo ad Amburgo ed a Monaco, precisi a Roma, servono benissimo a Torino ed a Palermo.

Il diffondersi di questi campioni contribuirà potentemente all'abbandono del kilopondo. Nè sarà trascurabile il vantaggio: dato che, entro il 2%, il kilogrammo-peso è senz'altro il decanewton e che molto spesso, nelle misurazioni tecniche, ove occorrono campioni di forza, non si supera l'approssimazione del 2%.

2. — Joule e caloria.

Anche qui è necessaria una premessa: cioè, si è d'accordo che lo svolgimento metrologico della Terminologia comporti, rispetto alla Meccanica, l'aggiunta di una nuova grandezza fondamentale, la temperatura, e di questa sola?

Nell'articolo pubblicato nella *Zeitschrift* del V.D.I. ciò non è detto esplicitamente. Sarebbe opportuna una chiarificazione.

Superata questa premessa, notiamo che la sfiducia della Commissione Scientifica del V.D.I. sulla possibilità di abolire la caloria ⁽⁶⁾ è veramente eccessiva

⁽⁶⁾ La deliberazione (1948) del Comité International, successivamente sancita dalla IX Conférence Générale des Poids et Mesures, suona così: « L'unità di quantità di calore è il joule. Nota. - Si chiede che i risultati di esperienze calorimetriche siano, per quanto è possibile, espressi in joule. Se le esperienze sono state fatte col confronto di un riscaldamento d'acqua e se per una ragione qualsiasi non si può evitare l'uso della caloria, si dovranno fornire tutte le indicazioni necessarie per la conversione in joule ». Il Comité International ha di conseguenza (Marzo 1950) raccolto in una tabella i

e non corrisponde a quanto l'esperienza ha dimostrato che si possa ottenere, sia pure con lenta gradualità, in tema di innovazioni metrologiche.

Non sarei ritornato su questa considerazione se non avessi trovato nell'articolo in questione le affermazioni seguenti.

1) « Il fatto che la caloria non rientra nel sistema Giorgi non ha alcuna importanza ».

Ma in questo modo non si fa più della metrologia, bensì dell'empirismo, perchè si disconosce l'importanza di un sistema coerente di misura (7). Di questo passo si giungerà ad accettare il litro, l'atmosfera, il cm_{Hg} e (perchè no?) l'acro, l'ugero, il moggio e che so io. Così il merito del Giorgi, di aver costituito nell'elettromagnetismo un sistema coerente in luogo dell'antico sistema pratico ibrido, viene spiegabilmente misconosciuto.

2) Si ha « semplice correlazione della caloria con il calore specifico dell'acqua ».

Al contrario, col perfezionarsi della tecnica sperimentale, le difficoltà di precisare il calore specifico dell'acqua e quindi di definire la caloria in funzione di questo calore specifico, sono cresciute a tal punto da divenire uno dei principali incentivi per

— preferire la definizione convenzionale di caloria come quantità d'energia termica equivalente a 3600/860 joule;

— sganciare così la caloria dal calore specifico dell'acqua e collegarla rigidamente al joule; e infine per

— farle di conseguenza perdere il carattere di unità fondamentale di misura. Con ciò la caloria non è abolita; è mutata concettualmente, perchè cessa di essere unità fondamentale indipendente; non è mutata praticamente (8). Alla caloria è dunque assegnata quella definizione univoca in funzione del joule, sganciata dal calore specifico dell'acqua, che anche il Consiglio Scientifico del V.D.I. ben giustamente auspica.

3) Poichè alla caloria è attribuito un valore esatto per convenzione, non vedo quale « maggiore esattezza della sua espressione » può riservarsi il futuro.

4) Infine, in quanto ai dannosi « riflessi economici e burocratici della coesistenza per lunghi anni di due unità differenti di quantità di calore », fornite ciascuna di un suo nome ben distinto (joule, caloria), io confesso di non vederli, come ad esempio non vedevo, nella mia lontana gioventù, gravi inconvenienti a trattare i miei piccoli acquisti indifferentemente in « centesimi di lira » che era la moneta legale o in « soldi », unità di moneta non più legalmente riconosciuta, e parificata a 5 centesimi nella maggior parte delle regioni d'Italia (ma non dappertutto).

In conclusione, io oserei esortare il V.D.I. ed il suo Consiglio Scientifico a riprendere in esame i problemi che hanno fatto oggetto della comunicazione da cui io ho preso le mosse; e spero che da questo nuovo esame possa scaturire un diretto e valido aiuto agli sforzi internazionali che oggi vengono compiuti da tanti organi scientifici verso l'unificazione mondiale dei sistemi di misura.

(8) Confronta l'analogo caso per la candela nuova rispetto alla candela internazionale, per l'ampere assoluto rispetto all'ampere internazionale.

valori più attendibili del calore specifico dell'acqua in funzione della temperatura, espressi in joule/°C. Lo scrivente, quale membro del Comité Consultatif de Thermométrie et Calorimétrie, presso il Comité International des Poids et Mesures, fece già notare come sarebbe stato preferibile che, nel testo della *Nota* precedente il termine « caloria » fosse stato sostituito da « calore specifico dell'acqua » più aderente alla realtà.

(7) Tra i vantaggi dello schema di progetto internazionale sul sistema di misure, che ogni nazione ha ora allo studio dopo il voto della IX Conférence Générale des Poids et Mesures (1948), io rilevo anche l'evidente tendenza ad eliminare il litro come unità di volume indipendente e distinta dal dm^3 .

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

G. P. GOMBAS: *Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik*. Un vol. in-8° (della « Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften: Physikalische Reihe »: volume secondo) di 268 pagine con 20 figure. Verlag Birkhäuser, Basel 1950. Prezzo: in brochure 24,50 fr. sv., rilegato 29,50 fr. sv.

Questo libro è stato scritto dall'autore per chi, già possedendo i fondamenti della meccanica quantistica, intenda familiarizzarsi con le sue applicazioni a problemi in cui intervengono due o più elettroni. Tali sono, in realtà, quasi tutti i problemi di fronte a cui si trova non soltanto lo studioso di fisica, ma anche quello di fisica applicata o di chimica, pensando ai quali l'autore ha cercato di limitare il più possibile, compatibilmente con la natura dell'argomento e con il rigore della sua trattazione, l'uso di complicati formalismi matematici.

L'accurato ordinamento della materia e la limpida esposizione rendono questo libro particolarmente efficace per chiunque desideri apprendere e seguire le applicazioni della meccanica quantistica fino ai risultati numerici.

Il libro è diviso in due parti, la prima dedicata alle teorie generali, la seconda ai metodi di soluzione dei problemi quantistici di più particelle.

Nella prima parte, dopo aver ricor-

dato rapidamente ma pur tuttavia in modo assai chiaro ed efficace, i concetti e le equazioni fondamentali della meccanica quantistica, la teoria delle perturbazioni e l'impostazione generale dei problemi in cui interviene un numero qualsiasi di corpuscoli, l'autore dedica un capitolo all'atomo, uno alle molecole, un terzo ai problemi con un gran numero di particelle e alla loro trattazione statistica e l'ultimo alla quantizzazione delle onde.

Questa prima parte, pregevole di per sé, è stata però stesa dal GOMBAS soprattutto come una introduzione alla seconda parte. In questa, dopo un ampio capitolo dedicato ai metodi variazionali ve ne è uno in cui viene esposto il metodo di Hartree del cosiddetto « self consistent field » e un altro dedicato al metodo di Thomas-Fermi e ai suoi principali sviluppi ed applicazioni.

La ricchezza di esempi ed applicazioni, portate fino ai risultati numerici, rendono la seconda parte del volume estremamente utile e al tempo stesso di piacevole lettura e facile consultazione.

Questo libro del GOMBAS, nel suo complesso, non solo sarà di grande utilità agli studenti di fisica ma è anche destinato a contribuire notevolmente alla diffusione dei concetti quantistici fra cultori di scienze affini alla fisica.

L'edizione è molto bella come sa chiunque conosca altri volumi della collezione scientifica del Birkhäuser.

E. AMALDI

A. A. RUSTERHOLZ: *Elektronenoptik*.
I. *Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik*. Un vol. in-8° (della *Lehr und Handbücher der Ingenieurwissenschaften*) di 249 pagine con 118 figure. Verlag Birkhäuser, Basel 1950. Prezzo: in brochure 25 fr. sv.; rilegato 29,0 fr. sv.

In questo volume l'autore espone i fondamentali dell'ottica elettronica limitatamente al caso di campi elettrici e magnetici stazionari o lentamente variabili. Dalla prefazione si apprende che a questo primo volume farà seguito un secondo in cui la teoria generale verrà applicata ad alcuni problemi particolarmente importanti come quello dell'oscillografo catodico e del microscopio elettronico. L'impostazione del libro, rivolto principalmente ai costruttori di apparecchi in cui intervengono problemi di ottica elettronica e il tono stesso della esposizione sono quelli di un testo per un buon corso di una scuola di ingegneria elettronica.

Dopo aver ricordato le formule fondamentali esprimenti le forze esercitate da campi elettrici e magnetici su corpuscoli carichi e le leggi del moto descritto da questi nel caso di campi omogenei (capitolo I) l'autore imposta il problema del moto di un corpuscolo in un campo elettrico e magnetico qualsiasi partendo dalle equazioni di Lagrange di seconda specie, e ne deduce l'espressione dell'«indice di rifrazione» (capitolo II). Il III capitolo è dedicato alle proprietà dei campi dotati di un asse di simmetria ed il IV allo studio delle traiettorie descritte

dai corpuscoli in detti campi. Il V capitolo tratta la lente elettrica, il VI la lente magnetica, il VII le aberrazioni delle immagini elettroniche, l'VIII le lenti bidimensionali e in particolare le lenti cilindriche e i deflettori o «prismi», e il IX lo specchio elettronico.

La materia è esposta con molta cura e la ricca bibliografia è disposta in modo da agevolare uno studio più approfondito di quegli argomenti particolari che, per necessità, vengono trattati solo succintamente nel presente volume.

La materia è esposta con molta cura e la ricca bibliografia è disposta in modo da agevolare uno studio più approfondito di quegli argomenti particolari che, per necessità, vengono trattati solo succintamente nel presente volume.

Per quanto esistano già vari altri libri assai buoni che trattano questo stesso argomento e dei quali il RUSTERHOLZ naturalmente tiene conto, come risulta esplicitamente dalle frequenti citazioni, mi sembra che il presente volume si distingua da tutti gli altri soprattutto dal punto di vista didattico.

E questo è importante data la sempre crescente importanza che l'ottica elettronica va acquistando di giorno in giorno nella tecnica e nella industria moderna.

Un giudizio più completo sull'opera del RUSTERHOLZ si potrà dare dopo la pubblicazione del secondo volume ove l'autore potrà, ancor più che nel primo travasare la vasta esperienza raccolta nei laboratori della Röhrenfabrik della Brown Boveri.

E. AMALDI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA